

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE  
GOIÁS  
CÂMPUS JATAÍ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA

**DOUGLAS PEREIRA AZEVÊDO**

**ENSINO DESENVOLVIMENTAL:  
Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos Números  
Complexos**

JATAÍ - GO

2016

**DOUGLAS PEREIRA AZEVÊDO**

**ENSINO DESENVOLVIMENTAL:  
Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos Números  
Complexos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática.

**Área de concentração:** Fundamentos, metodologias e recursos para a Educação para Ciências e Matemática.

**Linha de pesquisa:** Ensino de Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

JATAÍ - GO

2016

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

	Azêvedo, Douglas Pereira.
AZE/ens	Ensino desenvolvimental : um Experimento Didático Formativo para o estudo dos Números Complexos [manuscrito] / Douglas Pereira Azevêdo -- 2016.
	198 f.; il.
	Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.
	Dissertação (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós – Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2016.
	Bibliografia.
	Apêndices.
	1. Teoria Histórico-Cultural. 2. Ensino Desenvolvimental. 3. Ensino-aprendizagem de Matemática. I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas Vaz. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.
	CDD 510.19

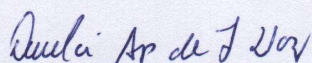
Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.

Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Câmpus Jataí. Cód. F009/17.

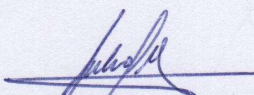
DOUGLAS PEREIRA AZEVEDO

ENSINO DESENVOLVIMENTAL: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO PARA O  
• ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

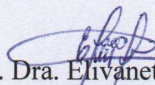
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora.



Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz  
Presidente da banca / Orientador  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás



Prof. Dr. Julio César Saaveda Vasquez  
Membro interno  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás



Profa. Dra. Elivânete Alves de Jesus  
Membro externo  
Unievangélica

Jataí, 02 de dezembro de 2016

### ***Dedicatória***

*Este trabalho é dedicado às pessoas que sempre estiveram ao meu lado pelos caminhos da vida, me acompanhando, apoiando e por todo carinho e orações recebidas.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele!

À Nossa Senhora, por estar sempre comigo, me guiando, iluminando meus passos e me abençoando!

À meus pais, Erlane e Valdivino, que nunca mediram esforços para que eu chegasse até aqui!

À minha avó Maria, pelo cuidado, pelas orações e pelo amor recebido!

À toda a minha família que com muito carinho e apoio me ajudaram na conclusão de mais esta etapa da minha vida.

Aos amigos fora da Universidade que sempre estiveram ao meu lado pelos caminhos da vida, me acompanhando, apoiando respeitando as minhas ausências!

À todos os meus professores que me acompanharam ao longo desta vida, em especial a Núbia Cristina dos S. Lemes, Thalitta Fernandes de C. Peres, Claudimary Moreira da S. Oliveira e Renato Assis Ribeiro - que me mostraram os primeiros passos na iniciação científica. Obrigado por todo apoio e incentivo!

À Secretaria Municipal de Educação de Arenópolis-Go. De forma especial, a Professora Maria Aparecida Paula dos Santos Dantas (Tia Tida) e Diretora da escola a qual trabalho, Xisleque Tioleiva de Oliveira e Sousa pelo apoio e incentivo constante para a conclusão deste.

Ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) Câmpus-Jataí, que me possibilitou adquirir muito mais que um diploma!

Aos Professores integrantes da banca examinadora, Dr. Júlio César Saavedra Vasquez, Dra. Elivanete Alves de Jesus e Dra. Simone Ariomar de Souza, por terem aceitado participar deste trabalho. Obrigado pela atenção e pelas valiosas sugestões e contribuições oferecidas durante a qualificação.

À todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas da Terceira turma do Mestrado, em especial, Núbia Patielle, Glen Moreira e Quintino Custódio. Obrigado pela ajuda na triagem, pelos momentos de gargalhadas e pelo incentivo e apoio constantes! Vocês são os melhores!

À escola-campo de pesquisa, bem como a Professora da escola e aos alunos que destinaram seu tempo para participarem desta pesquisa.

E finalmente ao grande amigo e Professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz, pela paciência na orientação, incentivo, por seus ensinamentos, por compartilhar seus conhecimentos e experiências, e pela confiança ao longo deste trabalho. Enfim, por ser um exemplo de educador e pesquisador justo e Humano. Reitero minha admiração, respeito e amizade!

*De tudo, ficaram três coisas:*  
*A certeza de que estamos sempre começando...*  
*A certeza de que precisamos continuar...*  
*A certeza de que seremos interrompidos antes de terminar...*  
*Portanto devemos: Fazer da interrupção um caminho novo...*  
*Da queda um passo de dança...*  
*Do medo, uma escada...*  
*Do sonho, uma ponte...*  
*Da procura, um encontro...*  
Fernando Pessoa



## RESUMO

A presente pesquisa tem como tema central o ensino-aprendizagem dos Números Complexos. Apoiada em referenciais teóricos da Educação Matemática notamos que a dificuldade de aprendizagem Matemática está muitas vezes ligada aos métodos de ensino. A fundamentação teórica que norteou o presente estudo é pautada na Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, além de outros autores como Chaiklin, Lompscher, Hedegaard entre outros que realizaram suas pesquisas em diferentes etapas de ensino, com o objetivo de pensar em um ensino que ajude os alunos a desenvolver o pensamento teórico. Buscamos, pois, responder à seguinte pergunta: “Como organizar o ensino-aprendizagem dos Números Complexos por meio do Experimento Didático Formativo de Davydov?”. Para responder tal questão, objetivamos analisar e discutir práticas e estratégias de ensino afim de propiciar aos alunos a construção do conceito de Números Complexos. Para tanto, precisamos compreender e apropriarmos das Teorias de Ensino de Vygotsky e de Davydov, afim de reconhecer o aspecto nuclear do conceito de Números Complexos como base para o seu ensino. Utilizamos como ferramenta ou recurso de aprendizagem o *software* GeoGebra, no intuito de propor tarefas mais dinâmicas. Neste sentido, ao longo deste trabalho discutimos também sobre as possibilidades e desafios quanto ao uso das Tecnologias de Aprendizagem para o ensino de Matemática. Quanto aos procedimentos metodológicos a pesquisa foi de natureza qualitativa por meio da realização do Experimento Didático Formativo numa turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior deste Estado. Os instrumentos de pesquisa foram observação, entrevista, filmagens, questionário, diário de bordo, fotos e tarefas realizadas dessa turma. Os resultados apontaram que a organização do ensino baseada nos pilares do Experimento Didático Formativo se consolida como uma alternativa para a superação dos métodos de ensino de Matemática que não privilegiam o desenvolvimento do aluno, sendo uma possibilidade efetiva para o ensino-aprendizagem dos Números Complexos.

**Palavras-chave:** Teoria Histórico-Cultural. Ensino Desenvolvimental. Ensino-aprendizagem de Matemática.

## ABSTRACT

This research has as its central theme the teaching and learning of complex numbers. Supported in theoretical references of mathematics education we note that the difficulty of learning math is often linked to teaching methods. The theoretical foundation that has guided this study is based on Cultural-historical Theory of Vygotsky and the theory of Developmental Education of Davydov, in addition to other authors such as Chaiklin, Lompscher, Hedegaard among others who carried out their research at different stages of education, with the goal of thinking in an education that helps students to develop the theoretical thought. Yes, we seek to answer the following question: "how to organize the teaching and learning of complex numbers by means of Didactic Training Experiment of Davydov?". To answer this question, we aim to analyse and discuss teaching strategies and practices in order to provide students with the construction of the concept of complex numbers. To this end, we need to understand and own educational theories of Vygotsky and Davydov in order to recognize the nuclear aspect of the concept of complex numbers as the basis for his teaching. Used as a tool or resource for learning the software GeoGebra in order to propose more dynamic tasks. In this sense, throughout this work we also discussed about the possibilities and challenges regarding the use of learning technologies for the teaching of Mathematics. Regarding the methodological procedures the research was qualitative in nature through the realization of Didactic Training Experiment in a class of 3rd year of high school to a public school in the interior of that State. The research instruments were observation, interview, questionnaire, footage, logbook, photos and tasks performed in this class. The results showed that the organisation of teaching based on the pillars of Didactic Training Experiment is consolidated as an alternative for overcoming the math teaching methods that do not favour the development of the student, being an effective possibility for the teaching and learning of complex numbers.

**Keywords:** Historical-Cultural Theory. Developmental Education. Teaching and learning of Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Interface do software Geogebra (tela inicial) -----	78
Figura 2: Diagrama de Conjuntos Numéricos-----	79
Figura 3: Representação de um Número Complexo no plano -----	92
Figura 4: Plano de Argand-Gauss -----	92
Figura 5: Foto do Laboratório de Informática da escola -campo-----	114
Figura 6: Tarefa realizada pelo aluno -----	121
Figura 7: Tarefa realizada pelo aluno -----	121
Figura 8: Tarefa realizada pelo aluno-----	123
Figura 9: Tarefa realizada pelo aluno-----	123
Figura 10: Tarefa realizada pelo aluno-----	124
Figura 11: Tarefa realizada pelo aluno-----	126
Figura 12: Rotação de $180^\circ$ de um vetor -----	126
Figura 13: Tarefa realizada-----	127
Figura 14: Tarefa realizada-----	128
Figura 15: Tarefa realizada-----	128
Figura 16: Tarefa realizada-----	129
Figura 17: Tarefa realizada pelo aluno A3 -----	130
Figura 18: Área do Retângulo -----	131
Figura 19: Retângulo com diagonal -----	131
Figura 20: Área do Triângulo -----	132
Figura 21: Alguns dos alunos da Escola-Campo -----	142

## LISTA DE QUADROS

Quadro 01: Dos livros didáticos analisados .....	94
--	----

## LISTA DE APÊNDICE

APÊNDICE A – Questionário Socioeconômico -----	159
APÊNDICE B – Roteiro de Entrevista para Alunos -----	163
APÊNDICE C – Roteiro de Entrevista com a Professora -----	165
APÊNDICE D – Consentimento de Participação dos alunos como sujeito de pesquisa -----	167
APÊNDICE E – Tarefas de Estudo trabalhadas na escola -----	169
APÊNDICE F – Plano de Ensino -----	189
APÊNDICE G – Versão do Produto Final -----	193

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	15
<b>1 ENSINO - APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E OS PROCESSOS DE (RE)CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO</b>	21
1.1 Caminhos da Formação do Professor Pesquisador: da docência à pesquisa	21
1.2 Perspectivas da Educação Matemática para a Formação de Professores de Matemática	23
1.3 Formação do Professor de Matemática: Dificuldades e Desafios	26
<b>2 QUESTÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL</b>	31
2.1 Vida e Obra de Vygotsky	31
2.2 Aspectos Históricos	33
2.3 Teoria Histórico-Cultural	35
2.4 Formação de Conceitos	39
2.5 Zona de Desenvolvimento Proximal	45
2.6 Aproximações da Teoria Histórico-Cultural para o ensino-aprendizagem da Matemática	48
2.6. Teoria da Atividade	51
<b>3 A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO</b>	55
3.1 Percorrendo Caminhos de Desenvolvimento	55
3.2 Pensamento Teórico e Organização do ensino-aprendizado	57
3.3 Implicações da Teoria do Ensino Desenvolvimental na Tarefa de Estudo	61
<b>4 O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA</b>	67
4.1 Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS): Implicações no contexto educacional	67
4.2 Tecnologias em Educação Matemática	72
4.3 O GeoGebra	77
<b>5 O DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b>	81
5.1 História dos Números Complexos	81
5.1.1 A Unidade Imaginária	89
5.1.2 Representação do Plano de Argand-Gauss e Operações	90
5.2 Apresentação dos Números Complexos nos Livros Didáticos	95
<b>6 O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DE CONCEPÇÕES DAVYDOVYANAS</b>	97
6.1 Elaboração das Tarefas	97
6.2 Aspectos Metodológicos da Pesquisa	100
6.3 Os Sujeitos e o Cenário de Pesquisa	102
6.4 O Campo da Pesquisa: Trilhando Caminhos	105
6.5 Produzindo ações e gerando conhecimento	107
6.6 Metodologia do Experimento Didático Formativo	109
6.7 O Experimento de Ensino	112
6.8 Descrição e Análise do Experimento Didático Formativo	115
6.8.1 1º Momento – Motivação Externa: Filme “Vida Maria”	116
6.8.2 2º Momento – Primeiro contato com o <i>software</i> GeoGebra: fazendo algumas manipulações	119
6.8.3 3º Momento – Primeiras Impressões: Tarefas de Estudo	119
6.8.4 4º Momento – Primeiras Impressões: Tarefas de Estudo	120
6.8.5 5º Momento – Primeiras Impressões: Tarefas de Estudo	122
6.8.6 6º Momento – Consolidação das operações de adição e subtração: Tarefas de Estudo	123
6.8.7 7º Momento – Verificação dos resultados de Cardano: Tarefas de Estudo	124

6.8.8 8º Momento – Operações de multiplicação com os Complexos e reconhecimento da Unidade Imaginária: Tarefas de Estudo -----	125
6.8.9 9º Momento – Operações de multiplicação com os Complexos e reconhecimento da Unidade Imaginária: Tarefas de Estudo -----	127
6.8.10 10º Momento – Operações de multiplicação com os Complexos e reconhecimento da Unidade Imaginária: Tarefas de Estudo -----	128
6.8.11 11º Momento – Módulo e Aplicações dos complexos: Tarefas de Estudo -----	129
6.8.12 12º Momento – Argumento e Conjugado dos Complexos: Tarefas de Estudo -----	130
6.8.13 13º Momento – Aplicações dos Complexos na Física e na Geometria: Tarefas de Estudo -----	131
6.8.14 14º Momento – Aplicações na Geometria e na Engenharia Elétrica: Tarefas de Estudo-----	132
6.8.15 15º Momento – Centro de Massa: Tarefas de Estudo -----	133
6.9 Avaliação do Experimento Didático Formativo -----	134
6.10 Avanços e Desafios -----	136
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> -----	145
<b>REFERÊNCIAS</b> -----	149
<b>APÊNDICES</b> -----	157









## INTRODUÇÃO

Os dados apresentados e divulgados na mídia das provas externas realizadas atualmente como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Indicador de Alfabetismo Funcional (INAF), Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) sobre a educação brasileira, indicam que há muitas dificuldades e desafios no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Os resultados obtidos pelos alunos brasileiros nestas e outras avaliações mostram que não está acontecendo o que os documentos orientadores do Ministério da Educação e Cultura (MEC) almejam. Sugestões sobre a forma de ensinar os conteúdos estão presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e apontam para a superação do ensino memorístico e a aplicação direta de fórmulas.

Diversas são as dúvidas que frequentemente inquietam os professores e estudantes quanto à forma de ensinar e de aprender, inquietações estas que também preocuparam vários matemáticos do passado e foram estas as responsáveis pelo desenvolvimento da Ciência Matemática.

Por um longo período ministrando aulas de Matemática sobre Números Complexos na 3ª série do ensino médio de escolas públicas, percebi que nós professores e os alunos sentíamos dificuldades quando o objeto de estudo era o conjunto dos números complexos.

Muitas vezes por falta de conhecimento ou por acreditar que a Matemática por si só se justifica, ao sermos questionados por nossos alunos damos cotidianamente explicações vazias, sem sentido (ARAUJO, 2006). No aluno mais questionador é natural que esta forma de apresentar o conteúdo desperte as indagações: para que serve isso? Por que tenho que estudar esse conteúdo?

As dúvidas de muitos dos nossos alunos e professores são manifestadas principalmente pelo fato de desconhecermos o motivo de estudar tal conteúdo matemático ou de ensiná-lo. O ensino de números complexos é em muitos casos introduzido de forma tradicional, via álgebra, não levando em conta a abordagem geométrica e a aplicação desses números.

Impregnado ainda por este olhar, talvez influenciado pelo processo formativo e até mesmo influências de professores que tive ao longo da Educação Básica, adentrei – me no universo da Docência, e acreditava que as minhas respostas seriam convincentes, contudo não foi o que pensei. Os questionamentos surgiram e me fizeram refletir, repensar a minha prática.

Aquilo que deu certo para tal conteúdo, muitas vezes numa outra sala não gerava o mesmo resultado.

Além disso, via constantemente colegas de trabalho levarem os alunos para o Laboratório de Informática da escola, simplesmente para jogar, brincar, ver vídeos ou filmes. Os alunos me cobravam para levá-los mas eu pensava, “porque e para que levar?”. Quando íamos sempre era para de fato fazer algo sobre a matéria como uma pesquisa ou ver um vídeo ou filme que fosse importante para o conteúdo. Mas isso me intrigava, ouvia muito falar em *softwares*, contudo o novo amedrontava. Questões e embates pessoais como estes, tinha quase todos os dias, antes, durante e após o trabalho. Sendo assim, uma das concepções e ideias da profissão docente que findaram, foi a de que somente conhecer Matemática era suficiente para ensinar e motivar os alunos. A profissão docente está além do trabalho de um técnico, de um aplicador de saberes, mas sim de um mediador de conhecimentos que elabora com criatividade os conhecimentos teóricos e críticos sobre a realidade.

E é nesta perspectiva que este trabalho procura tecer reflexões quanto ao ensino-aprendizagem de Matemática, relativo aos Números de Complexos, visto que alunos e professores acabam tendo muito mais contato com os outros conjuntos numéricos.

Na configuração de nossa profissão, não podemos nos isolar no interior da sala de aula, precisamos abrir para os outros, para os colegas, colaborar com eles, ajudar e deixar ser ajudado em prol de melhorias das práticas docentes.

Por meio destes e outros embates, as minhas concepções enquanto Professor de Matemática foram transformando gradualmente ao longo desses poucos anos, e tenho a plena convicção de que estas sofrerão mudanças. A mera reprodução de fórmulas e teoremas foi dando espaço para o educador matemático, todavia faltava-me algo. Faltava algo para me apoiar, um aporte teórico que norteasse a minha prática.

Ainda na graduação tive contato com a Teoria Histórico-Cultural durante a elaboração da monografia, orientado pela Professora Ms. Núbia Cristina dos Santos Lemes, e durante o período de dois anos em que participei do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), tendo como supervisora do projeto a Professora Ms. Thalitta Fernandes de Carvalho Peres. Programa este, do Ministério da Educação que tem como objetivo antecipar o vínculo entre os futuros professores e as salas de aulas da rede pública por meio da articulação entre os cursos de licenciaturas, as unidades escolares e os sistemas de educação estaduais e municipais. Em seguida fiz Especialização *lato sensu* em Psicopedagogia Interdisciplinar e Clínica. Os estágios realizados tanto na graduação, quanto na pós, possibilitaram o surgimento de um sentimento de inquietação em torno da busca contínua por formas mais significativas de

ensinar Matemática. Todavia, esses subsídios ainda não eram suficientes para a realização de um bom trabalho. As experiências e os processos formativos foram construindo a ideia de que o caminho para alcançar o meu intento seria por meio de mais capacitação.

Foi então que surgiu a oportunidade de participar do processo seletivo do Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática. Motivado por professores da graduação participei do processo e fui aprovado. Encarei este novo ciclo que iniciara, como oportunidade de novas leituras da docência da Matemática e principalmente do mundo.

Em meios a diálogos e leituras durante o Mestrado, o caminho escolhido para este trabalho foi o de assumir e de perceber o homem em seu aspecto cultural, afim de contribuir para, “[...] complementaridade às questões de que o homem se faz partícipe do enfrentamento ao atual mundo plural” (RIBEIRO, 2010, p. 27). Refletir e observar são ações importantes, todavia o que deve prevalecer é que toda pesquisa ou trabalho deve ter como objetivo principal o outro.

Diante de todas estas ponderações, surge como questão norteadora ao longo deste trabalho a seguinte:

Como organizar o ensino-aprendizagem dos Números Complexos por meio do Experimento Didático Formativo de Davydov?

Ao definir o problema de pesquisa, consideramos que o objetivo deste trabalho é o de discutir e analisar práticas e estratégias de ensino afim de propiciar aos alunos a construção do conceito de Números Complexos e funcionamento das operações neste conjunto, a partir de sua representação geométrica e algébrica, no intuito que os mesmos articulem/relacionem estas duas linguagens Matemáticas.

A presente pesquisa, de cunho qualitativo, está orientada nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural a partir de L. S. Vygotsky e seus seguidores, particularmente a Teoria do Ensino Desenvolvimental formulada por V. V. Davydov.

O texto apresenta o relatório da pesquisa em seu conjunto, composto de 6 capítulos, além da introdução e das considerações finais.

Primeiramente, no capítulo 1, faremos ponderações sobre o ensino-aprendizagem de Matemática e sua organização, confrontando com alguns aspectos da Educação Matemática, bem com a importância de fazer pesquisas e conseqüentemente do perfil do professor pesquisador. Neste tópico, destacamos autores como Fiorentini e Lorenzato (2009), Ribeiro (2010), Miguel (1992), Garcia (2009) e outros que contribuem para as reflexões sobre a questão de formação de Professores de Matemática.

Os capítulos 2 e 3, foram dedicados ao Materialismo Histórico Dialético de Marx, a Teoria Histórico – Cultural de Vygotsky e ao Ensino Desenvolvimental de Davydov. Sendo assim, buscamos alguns conceitos desde Marx e os desdobramentos realizados por Vygotsky e Davydov e embasados em pesquisas além do próprio Vygotsky (2013, 2003) e de Davydov (1988, 1999), Rego (2007), Libâneo (2004, 2007, 2011, 2012), Veggette (2004), Hedegaard (2002) e tantos outros que por meio de suas pesquisas também cooperaram para os objetivos deste estudo.

No capítulo 4, fizemos um breve percurso quanto ao desenvolvimento dos Números Complexos. Alguns dos poucos autores que produziram pesquisa e conhecimento neste campo da Matemática colaboraram para esta pesquisa, tais como: Araujo (2006), Junior (2009), Mathias (2015), dentre outros. Apontamos ainda algumas concepções de ensino de Números Complexos. Estas concepções como veremos, são necessárias para a organização do ensino e para a estruturação da tarefa.

Em seguida, no capítulo 5 refletimos sobre as implicações do uso das Tecnologias na Educação, em especial no ensino de Matemática, dando ênfase ao *software* GeoGebra. Discutimos sobre as novas tecnologias na educação, seus impactos na sociedade, na escola, na formação de professores e nas atividades de professores e alunos que serão usuários destas novas ferramentas. Estudiosos como Vaz (2014), Bento (2010), Gravina e Santarosa (1998), Borba (2007), Lévy (2009), dentre outros colaboram nas reflexões sobre as tecnologias na Educação Matemática.

No capítulo 6, abordamos os passos da pesquisa, caracterizando os sujeitos envolvidos e o Experimento Didático Formativo de ensino. Análises, reflexões das ações dos alunos são apresentadas ao longo do trabalho em momentos de ensino, de forma a mostrar a formação do pensamento teórico formado por eles, firmados em autores como Cedro (2010). Neste capítulo ainda, discutimos aspectos ligados a avaliação, tendo como autor principal, o próprio Davydov (1988) além de Moraes (2008).

Em aspectos metodológicos, embasamos o trabalho em obras de autores como Bogdan e Bicklen (1994), Gil (2006), Moreira e Caleffe (2006), que nos auxiliaram nesta etapa do trabalho.

E por fim, nas considerações finais da pesquisa foi possível perceber que a forma como o ensino foi organizado no sentido de valorizar o desenvolvimento conceitual dos alunos, e não apenas a exposição de conteúdos, teve resultados animadores segundo critérios que adotamos. Sendo assim, apresentamos algumas reflexões sobre as contribuições e os desafios quanto ao

ensino dos Números Complexos e o uso de tecnologias, quando organizados com base na Teoria do Ensino Desenvolvimental.





# 1 ENSINO - APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E OS PROCESSOS DE (RE)CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

O ensino de matemática em sala de aula representa um desafio para o professor na medida em que exige que ele o conduza de forma significativa e estimulante para o aluno. Geralmente as referências que o professor tem em relação a essa disciplina vêm de sua experiência pessoal. Muitos deles afirmam que tiveram dificuldades com aquela matemática ensinada tradicionalmente nas escolas, que tinha como objetivo a transmissão de regras por meio de intensiva exercitação. Neste sentido, este capítulo discorre acerca de alguns embates teóricos e práticos, evidenciando ainda aspectos quanto a formação do Professor.

## 1.1 Caminhos da Formação do Professor Pesquisador: da docência à pesquisa.

A sociedade tecnológica passa de forma rápida por uma série de transformações, e a escola como uma instituição social, sofre as implicações destas mudanças na sociedade.

Educadores em geral ficam angustiados e acabam sofrendo com todas estas mudanças, pelo fato de não conseguirem adaptar ou acompanhar esse processo de inovação tecnológica. E este acompanhar das transformações tecnológicas é um dos desafios que a escola enfrenta, em como acompanhar as mudanças que a sociedade vem passando e como preparar os alunos para esta transformação no seu uso crítico e consciente?

Em 1988, a associação americana, “*The National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM)”, promoveu em Chicago, nos Estados Unidos, uma conferência da qual gerou o seguinte documento: *BASIC MATHEMATICAL: SKILLS FOR THE 21ST CENTURY*. Esse texto apresenta as 12 competências básicas que os alunos do século XXI deveriam saber tanto para um emprego, quanto para estudos futuros.

As doze áreas onde os alunos deverão apresentar habilidades são: resolução de problemas, comunicação de ideias matemáticas, raciocínio matemático, aplicações da matemática a situações da vida quotidiana, atenção para com a “razoabilidade” dos resultados, estimação, habilidades apropriadas de cálculo, raciocínio algébrico, medidas, geometria, estatística e probabilidade. (LORENZATO, VILLA, 1993, 42p).

Pelo exposto, notamos que a visão de educação Matemática é simplesmente uma visão tecnicista em torno de doze habilidades, isto é, formar para o mercado de trabalho, sem pensar na formação integral e humana das crianças e dos jovens.

O professor de Matemática precisa estar preparado para os desafios impostos pelo desenvolvimento das tecnologias e encontrar formas adequadas de inserir o uso destas na sala

de aula, na perspectiva sócio–interacionista, que é a proposta deste trabalho, com a ideia de que o aluno seja sujeito do seu próprio conhecimento.

O medo e incômodo do novo precisa ser encarado como impulso para levar o professor a sair de sua área de conforto rumo a um novo caminho, que de início pode ser algo difícil, pois precisa estar pautado no processo de pesquisa, que nem sempre é tão evidente e de fácil desenvolvimento.

O processo de pesquisa é uma construção que passa por muitas e profundas transformações ao longo do caminho. Por mais que tentemos explicar o que é uma atitude de investigação científica, o iniciante pesquisador só compreenderá quando ele de fato mergulhar neste processo. “[...] o novo pode salutar para substanciar sonhos e esperanças do novo pesquisador que surge.” (RIBEIRO, 2010, p. 31).

Neste bojo, “A maioria dos professores de Matemática não tem ideia de pesquisa e formulação própria, até porque foram literalmente treinados a dominar conteúdos sem qualquer questionamento reconstrutivo” (DEMO, 1996, p.30). É necessário para uma melhor compreensão do mundo, e em especial da Matemática, a passagem de uma atitude de receptor para pesquisador, pois quando abordamos o ensino de Matemática, o professor da educação básica deve fazer uso das questões e embates de sua formação unindo a sua prática, com o intuito de aprimorá-la, transformando-a.

A prática do professor precisa ser carregada de sentido e de significados para seus alunos, pois esta gera muito mais resultados do que o conhecimento matemático por si; a profissão de professor caracteriza-se por sujeitos organizadores do ensino. Assim, o professor, para agir, precisa estar ciente do que significa ser professor, já que a prática não é suficiente para solucionar as dificuldades; necessita pois fundamentar teoricamente as tomadas de decisões, escolhas num processo de construção e (re)construção do conhecimento.

Ao longo desta pesquisa o leitor verá que podemos sim dar sentido as ações didáticas, desde que reconheçamos o papel do professor como, “[...] formador de sujeitos humanizadores de seus mundos.” (MOURA, 2000, p. 126).

Assim como a ciência se reorganiza, os seres humanos também se reorganizam quanto a aprendizagem num processo de (des)construção e (re)construção do conhecimento. Parafraseando Calvino (1993, p. 9) quando escreve sobre a leitura e estudo dos clássicos: “Estou relendo...” e nunca “Estou lendo...”. A prática pedagógica, o fazer pesquisa deve ser sempre considerado como um processo formativo devendo ser encarado também como uma nova (re)leitura.

Formação é um processo que sofreu transformações conceituais, tomando uma conotação diferente da concebida até o século XX, quando um diploma de graduação já era o suficiente e indicava o “término dos estudos”. No século XXI, um novo sentido é construído para a formação, que indica aprimoramento constante do que não tem fim, uma construção e (re)construção contínua do saber.

Destarte, fica claro que o processo de investigação e de pesquisa deve ser caracterizado por uma atitude constante do professor, esse processo de construção e (re)construção do conhecimento precisa estar mediado pela prática docente mas também apoiado em referenciais teóricos.

## 1.2 Perspectivas da Educação Matemática para a Formação de Professores de Matemática

No tópico anterior, apresentamos algumas reflexões acerca da importância do professor pesquisador, perfil que é exigido dos professores do século XXI, influenciados talvez pelas mudanças e transformações rápidas na sociedade.

Nesta parte, citamos algumas concepções da Educação Matemática que contribuem para a produção escrita e reflexão do Experimento Didático Formativo de ensino. A essência deste tópico é de apontar contribuições para o ensino-aprendizado da Matemática, para a profissão docente.

O foco principal deste trabalho, como sabemos, não é a formação de professores embora almeje contribuir para a formação destes, bem como para a prática em sala de aula. Todavia, diante de todos os avanços tecnológicos e propostas de formação de professores de Matemática, os mesmos tem à sua disposição uma série de metodologias que podem ser aplicadas. Contudo, como Vaz e Jesus apontam, “A iniciativa de adotar determinada metodologia em aula é uma questão que está intimamente relacionada com a formação do professor”. (2014, p. 60).

Antes de iniciar reflexões sobre a temática da formação de professores de Matemática, é necessário discernir o profissional matemático do educador Matemático, profissionais estes que em muitas vezes são vistos como tendo as mesmas funções e objetivos. Entretanto, há diferenças entre as duas denominações, pois quando falamos no profissional matemático, queremos dizer que este “[...] tende a promover a educação *para* a Matemática, priorizando conteúdos formais e uma prática voltada à formação de novos pesquisadores em Matemática” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 3, grifos dos autores). Todavia, o educador

matemático coloca o conhecimento matemático a serviço da educação, concebendo a Matemática como um meio em que ele educa. Assim, o educador matemático “[...] tenta promover uma educação *pela* Matemática [...] sem estabelecer uma dicotomia entre elas.” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 3-4, grifos dos autores). Quanto a atuação do professor que atua no campo da Educação Matemática, sua principal função, segundo Ribeiro é de “[...] buscar os movimentos necessários para a construção da consciência crítica em prol de um fazer reflexivo sobre a sua prática investigativa.” (2010, p. 31).

E nesta busca destes movimentos, o educador matemático também tem a possibilidade de trabalhar o conhecimento já construído historicamente de forma investigativa juntamente com o aluno, por meio de diferentes metodologias. Esta também é uma característica do Educador Matemático que assume uma postura indispensável de mediador, isto é, facilitador do processo de ensino-aprendizagem.

A escola portanto não pode se isolar do mundo atual, esta deve estar atenta às necessidades que a sociedade atual coloca. Segundo Pavanello (s/ano, *apud* Miorim; Miguel; Fiorentini, p. 32, 1993) o maior problema do ensino de Matemática provém da forma como este fora inserido no sistema de ensino, caracterizado por uma falta de “consciência crítica”, pois:

Até a década de 30, as deficiências eram devidas ao fato de inexistirem no Brasil “cursos destinados a formação de professores secundários. Após a década de 30, as deficiências existem devido a estrutura das licenciaturas em Matemática, que, desde sua criação, vêm favorecendo o tratamento dos diferentes ramos do conhecimento matemático como compartimentos, estanques”.

O autor mostra por meio deste trecho que a concepção do ensino de Matemática que temos é advinda da formação dos próprios professores. O primeiro curso destinado a formação de professores de Matemática no Brasil surgiu somente em 1934, ofertado pela Universidade de São Paulo (USP). A precariedade de formação de muitos dos professores de Matemática iniciantes contribuiu e contribui na forma de pensar e idealizar o modelo de ensino-aprendizado de Matemática.

Neste sentido, Garcia (2009, p. 182) expõe que o processo de ensino-aprendizagem de Matemática vai além do triângulo professor-aluno-conteúdo, pois depende de vários outros fatores como:

[...] os significados e propósitos mobilizados nas suas atividades, suas visões subjetiva e pessoal, sua posição no contexto, suas concepções derivadas passadas, seus afetos e desejos, tudo participa no processo de aprendizagem. Além disso, o próprio pensamento é construído pela motivação, isto é, pelas necessidades, interesses e emoções.

É necessário que o professor objetive sua ação na busca pelo ensino de qualidade. Instigar o aluno a pensar e refletir sobre processos históricos do conceito.

As atividades de ensino e de aprendizagem não são indissociáveis, porém, em cada uma, há a marca dos sujeitos em seus processos. Na atividade de ensino, destaca-se a importância do professor na organização do ensino e, na atividade de aprendizagem, é evidenciado o escolar como sujeito das suas ações no processo de apropriação dos conhecimentos teóricos – conteúdo da atividade de ensino e de aprendizagem (MORAES; MOURA, 2009, p. 102).

Moretti, Asbahr e Rigon (2011, p. 483) argumentam sobre as ações dos professores que: “[...] são determinadas por terceiros e que não são para ele respostas à sua necessidade de ensinar, aliena-se ao romper com a unidade dialética entre motivo de sua ação e o produto que é objetivado”.

As crianças podem apropriar-se de conhecimentos e habilidades somente por meio da atividade de aprendizagem quando elas têm uma necessidade interna e motivação para realizá-la. A atividade de aprendizagem envolve a transformação do material para ser apropriado e implica que algum novo produto mental, isto é, conhecimento, é recebido (DAVYDOV, 1999, p. 3).

O trabalho do educador precisa privilegiar a humanização do homem, sendo estes professor e estudante, fazendo isto por meio da motivação, vinculando objetivos. Devemos permitir aos envolvidos no processo, aprender a pensar criando. Freitas (2012, p. 145) corrobora que: “[...] o desenvolvimento é uma consequência de como um sujeito age em atividades desafiadoras e como participa de atividades da vida cotidiana em diferentes práticas sociais”.

A escola é, pois, vista pela sociedade, como a instituição que tem a missão de difundir o saber. Até o século XX, o ensino transmissor era característico da escola e fazer esse processo de transmissão de conhecimento era função do professor. Até a década 70, por exemplo, o professor era caracterizado como um “aplicador de técnicas”, cabia a ele elaborar um planejamento que ligasse conteúdo, objetivos e métodos. Os cursos de formação de professores não privilegiavam a construção do conhecimento, visto que, o que era valorizado na época era a aprendizagem de técnicas.

Somente nos anos 80 é que começam a surgir questionamentos quanto a formação e aos métodos de ensino (FIORENTINI, LORENZATO, 2009). Surgem então questionamentos do tipo: “como ensinar”, “por que, para que e para quem ensinar?”. Questionamentos como estes colocam o professor no centro educativo, exigindo do mesmo a reflexão e a resposta para tais questões.

Na década de 90 ocorre um salto na educação e a influência das Tecnologias de Comunicação (TICs) passa a ser destaque nos cursos de formação de professores, visto que foram consideradas como a “solução” para os problemas de ensino. Fiorentini e Lorenzato (2009) caracterizam esse momento como uma crise do ensino, pois segundo eles, os professores, por medo de serem substituídos pelas máquinas, pelos computadores, mostraram resistências quanto ao uso das tecnologias.

Contudo, a década de 90 é um marco de transição significativo para a educação brasileira com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), no dia 20/12/96, que trata de todos os níveis e modalidades de ensino e inclusive sobre os rumos e programas de formação de professores para a educação básica. Pois “Durante três décadas e meia, a estrutura e o funcionamento dos cursos de formação dos profissionais da educação tiveram por fundamento legal a 1ª LDB e suas alterações, sobretudo as introduzidas pelo Regime Militar”. (CARVALHO, s/a, p. 82).

A Lei estabelece de forma geral os níveis de ensino, destacando a formação necessária para atuação em cada um, e no que tange o tema formação de professores, discute a necessidade de formação adequada dos professores que já estão em sala. No 4º parágrafo do art. 87 esta exigência fica clara; “[...] somente serão admitidos professores habilitados em nível superior ou formados por treinamento em serviço”. (BRASIL, 1996). Pela primeira vez admite-se uma formação mínima para a atuação na educação básica.

Todos estes elementos influenciaram de uma forma ou de outra a atuação do professor, visto que sua profissão difere das demais, vai além da repetição, transmissão de técnicas e de regras. O ato educativo engloba, pois, o fazer-reflexivo, a construção e (des)construção de ideais, mudanças que acarretam transformações.

### 1.3 Formação do Professor de Matemática: Dificuldades e Desafios

Notamos com frequência, que o ensino de Matemática é baseado em técnicas operatórias, resolução de exercícios e memorização de regras. Essa forma de ensino tem recebido críticas severas por parte de muitos educadores e pesquisadores e tem sido caracterizada como uma educação alienante ao invés de libertadora.

Moysés (2009, p. 59) denomina este fato de “encapsulamento” ou “encasulamento”, pois como a mesma cita: “[...] é como se o processo de escolarização encorajasse a ideia de que (...) o que conta é aprender vários tipos de regras simbólicas...”. Em outras palavras, ocorre um ensino fechado em si, pois grande parte dos professores tem a ideia de que a Matemática é um

produto, pronto, estático, acabado e que o aluno aprende por um processo de memorização ignorando a criatividade, a criticidade e outros aspectos que ele pode e precisa propiciar ao educando.

Em nossas vivências enquanto alunos e professores da Educação Básica, notamos que o contato com os Números Complexos ocorre somente nos últimos bimestres, meses da educação básica. Uma parcela dos alunos aprende a resolver operações, fazem algumas aplicações, contudo não entendem o real significado de fazer tal ação e principalmente, não entendem o sentido da não existência da raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais.

No 9º ano do Ensino Fundamental, os alunos se deparam com equações do segundo grau, que resultam em operações de raízes de índices pares de números negativos. O professor diz que a equação não tem solução dentro do conjunto dos números reais, mas que há outro conjunto no qual há solução, que são os Números Complexos. Todavia, quando veem os Números Complexos no Ensino Médio, fazem as operações mas não ampliam o conhecimento.

Esse fato faz com que alunos e até mesmo professores relacionem o desenvolvimento dos Números Complexos com a resolução de equações do segundo grau. Todavia, como veremos adiante, o desenvolvimento dos Números Complexos está relacionado a equações do terceiro grau.

Essa falsa ideia aparece em diversos livros históricos e em livros didáticos, que justificam o seu aparecimento simplesmente pela necessidade de ampliar os conjuntos numéricos na busca de resolução de equações do 2º grau. A história dos Números Complexos, assim como a história do desenvolvimento da Matemática, é um resultado rico de erros e acertos que fazem desta Ciência um produto cultural.

Sobre o ensino de Matemática, a Reforma Francisco Campos (1931) unificou todos os ramos da Matemática: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, em uma única denominação. Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) esboçam que durante todo este tempo até os dias atuais, as pesquisas ora estavam voltadas para a Geometria, outra para a Álgebra (pendular). Todavia, quando voltadas para Álgebra, os estudiosos a percebiam como um conjunto de técnicas e artifícios destinados, em sua maioria, à representação de problemas matemáticos.

Miorim, Miguel, Fiorentini (1993) destacam que estas mudanças foram baseadas nas ideias advindas da Alemanha, por meio de Felix Klein e adotadas por Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II. Segundo ele, ao propormos um problema para uma pessoa, ela não terá

tempo para pensar se aquele problema se trata de Aritmética ou de Álgebra, mas sim de um problema que necessita de artifícios e estratégias Matemáticas para ser resolvido.

No contexto das práticas pedagógicas escolares e da pesquisa em educação no Brasil, verificamos que professores e pesquisadores vem buscando mudanças no modo de organização do ensino. Por um lado há a preocupação em garantir que os alunos apropriem-se de conteúdos científicos e, por outro lado, há a preocupação com a valorização de conhecimentos gerados nas vivências e experiências cotidianas provenientes do contexto social e cultural dos alunos. Entendemos que sendo relevantes, ambas as preocupações, o problema que apresentamos é o de como organizar o ensino para que sejam resolvidas estas premissas. Veggetti (2004, p. 5) aponta que: “Durante a aprendizagem na escola, ou melhor, se se deseja ativar na escola uma aprendizagem efetiva, as ações do pensamento devem ser reportadas à elaboração dos produtos da cultura, como aconteceu na história geral da humanidade”.

Conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o que se espera dos alunos ao final desta etapa é que,

[...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (BRASIL, 2006, p.69-70).

Para entendermos o problema dos professores e alunos na formação dos conceitos matemáticos, Miguel (2005) destaca três temas para desenvolver no ensino-aprendizagem: a contextualização que considera na prática de ensino os aspectos histórico-culturais dos alunos; a historicização que mostra como a matemática evolui de acordo com as necessidades das pessoas e o enredamento, que é a organização das ideias matemáticas em outras áreas de conhecimento.

Longarezi e Puentes (2013) afirmam que a escola está ensinando muito mais questões ligadas à socialização em detrimento dos conceitos científicos (pensamento teórico) e quando são ensinados, não contemplam os desejos e anseios dos alunos. A falta de práticas de leituras colaboram ainda mais para que o quadro agrave pela falta de preparo para interpretação e compreensão de enunciados matemáticos. Grande parte dos estudantes brasileiros, que



concluem o Ensino Médio, saem da escola sem saber noções básicas de Matemática como operações algébricas, geométricas, leitura de gráficos, mapas e tabelas, probabilidade e porcentagem, dentre outros. Estes autores corroboram neste sentido quando afirmam que: “Aprende-se pouco, aprende-se mal, aquilo que se aprende é esquecido com facilidade e tudo isso interfere minimamente no desenvolvimento integral da personalidade dos estudantes” (2013, p. 10).

Oliveira e Baraúna (2012, p. 285) acrescentam que: “No modelo de aula que prevalece nas escolas na atualidade, não há ações físicas dos alunos (a não ser ficar em silêncio, escutar e anotar), a eles não é dado tempo de construir um objeto mental”. Inferência esta que vem contribuir nesta pesquisa, pois muitos alunos ao estudarem os números complexos (objeto mental) não têm noção de sua aplicabilidade geométrica devido a métodos de ensino tecnicistas que prevalecem nas escolas, não proporcionando momentos de pensar. Para tanto, Lompscher acrescenta que,

A instrução tradicional muito frequente começa com os fenômenos concretos diferentes e tenta transmitir aos alunos o que é essencial nestes fenômenos, mas os alunos ainda não tem uma ideia dessa essência e não podem alcançá-la, porque não tem nenhum meio de conseguir esse objetivo. [...] As explicações verbais do professor podem ser aceitas, mas não compreendidas pelos alunos. Assim, tem que ter em mente muitos fenômenos concretos e fatos isolados que sobrecarregam suas memórias em vez de subordiná-los a uma abstração apropriada que contém os traços e relações essenciais de uma classe inteira de objetos, eventos ou processos. (1999, p. 5).

As características principais do processo de ensino são os objetos científicos (conteúdos), que precisam ser apropriados pelos alunos mediante a descoberta de um princípio interno do objeto e, reconstruído sob forma de conceito teórico na tarefa conjunta entre professor e aluno. O papel do professor mais uma vez é destacado na percepção do trabalho de mediação pedagógica em conjunto (LIBÂNEO, 2012).

A iniciativa a ser abordada ao longo deste trabalho, reforça a ideia de Oliveira e Baraúna (2012, p. 286) quando apontam sobre a importância de se usar estratégias alternativas na prática do ensino de Matemática, afim de evitar discursos que não tenham sentido para os alunos, “Os alunos que estejam diante de algo sobre o qual podem agir e não sendo obrigados a decorar informações que não conseguem entender, participarão ativamente e se tornarão, assim, agentes de suas próprias aprendizagens”.

Neste cenário encontramos um caminho favorável que nos oferece pistas de como lidar com o terreno fértil da Matemática, como compreendê-la e ensiná-la: é a Teoria Histórico-Cultural e que desencadeou a Teoria do Ensino Desenvolvimental.



## 2 QUESTÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

As discussões seguintes abordam os principais pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, com base nos estudos de Vygotsky, Leontiev, Lúria e seus seguidores, fazendo um paralelo entre teoria e prática educacional, tendo em vista os aspectos do comportamento humano que não são estáveis, isto é, que estão sempre em mudança e desenvolvimento. Neste sentido, conceitos como: mediação, interação, Zona de Desenvolvimento Proximal, Formação de Conceitos serão abordados ao longo deste capítulo.

### 2.1 Vida e Obra de Vygotsky

Lev Semenovich Vygotsky<sup>1</sup> nasceu em Orsha no ano de 1896 e morreu no ano de 1934, de tuberculose aos 37 anos. Uma vida curta mas cheia de contribuições sobre os estudos da formação psíquica do homem.

Filho de um banqueiro e de uma professora formada, tinha sete irmãos e começou sua educação tendo aulas particulares em sua própria casa até os 15 anos de idade. Vygotsky cresceu e viveu por um longo período em Gomel, também na Bielo-Rússia, na companhia dos seus pais e de seus sete irmãos. Mostrou interesse em assuntos relacionados com artes e literatura. Sendo filho de pais bem instruídos, tinha acesso a diversos tipos de informações e por ter aprendido diversas línguas despertou o gosto pela leitura. Tendo assim, uma formação bastante diversificada.

Aos 17 anos de idade, completou o curso secundário num colégio privado em Gomel. Graduiu em Direito pela Universidade de Moscou, em 1917. Enquanto fazia seu curso superior, frequentou os cursos de psicologia, literatura e filosofia na Universidade de Shanyavskii. Logo após, cursou medicina, pois Vygotsky tinha interesse em compreender o desenvolvimento psicológico do ser humano e as anormalidades físicas e mentais. Para Rego (2007) Vygotsky conseguiu acumular amplo conhecimento sobre as diversas áreas dos saberes,

Assim seu percurso acadêmico foi marcado pela interdisciplinaridade já que transitou por diversos assuntos, desde artes, literatura, linguística, antropologia, cultura, ciências sociais, psicologia, filosofia e, posteriormente, até medicina. O mesmo ocorreu com sua atuação profissional, que foi eclética e intensa esteve sempre associada ao trabalho intelectual” (REGO, 2007, p. 22).

---

<sup>1</sup> A grafia do nome Vygotsky é encontrada em formas distintas: Vigotsky, Vygotski, Vygotski. No presente trabalho, optamos pela grafia Vygotsky, mas nas citações e referências mantem a original das obras usadas.

Vygotsky e toda geração de soviéticos daquela época foram influenciados pelas ideias filosóficas de Marx e Engels. Aos 21 anos começou a escrever críticas literárias, lecionou e proferiu palestras na cidade de Gomel no período de 1917 a 1923. No ano de 1922, publicou um estudo sobre métodos de ensino da literatura nas escolas secundárias (REGO, 2007).

Mas foi o ano de 1924 que marcou a sua carreira intelectual e profissional, pois foi a partir deste ano que ele começou a dedicar-se à psicologia. Nesse mesmo ano participou do II Congresso de Psiconeurologia em Leningrado, quando foi destaque na sua exposição, por ser um jovem de 28 anos de idade que dominava um tema complexo e por apresentar suas ideias revolucionárias sobre o estudo do comportamento humano. Nesse mesmo ano mudou-se para Moscou com o intuito de continuar os estudos, onde trabalhou no Instituto de Psicologia, e logo depois, no Instituto de Estudos das Deficiências que ele mesmo fundou. Com esse estudo sobre os deficientes físicos e mentais, ele foi chamado para dirigir um Departamento de Educação voltado para esse fim. E nesse mesmo ano escreveu o livro: Problema da Educação de crianças cegas, surdas, mudas e retardadas.

Desde o surgimento do homem até os dias atuais, diversas foram as pesquisas e estudos realizados afim de entender o desenvolvimento psíquico. Vygotsky tinha interesse no estudo das crianças, pois para ele, era nessa fase que acontecia um tipo de aprendizado que explicaria como ocorre o desenvolvimento psíquico. O nascimento é o primeiro contato da criança com o mundo e quanto mais ela se relaciona com a natureza e com o meio social em que vive mais descobre e aprende a viver em sociedade.

Vygotsky estudou e tentou entender como esse processo ocorre nessa fase, pois acreditava que poderia explicar como se dá o desenvolvimento psíquico do homem ao longo da história. Nesta questão Rego (2007, p. 25) esclarece que Vygotsky dava atenção especial para a criança no intuito de compreender os processos de apropriação do desenvolvimento cultural.

É importante ressaltar que a preocupação principal de Vygotsky não era a de elaborar uma teoria do desenvolvimento infantil. Ele recorre à infância como forma de poder explicar o comportamento humano no geral, justificando que a necessidade do estudo da criança reside no fato de ela estar no centro da pré-história do desenvolvimento cultural devido ao surgimento do uso de instrumentos e da fala humana.

E por meio dos estudos do desenvolvimento infantil, Vygotsky conseguiu mostrar como ocorre o desenvolvimento psíquico humano em relação ao contexto social. A seguir apresentamos alguns aspectos históricos da sociedade russa da época que influenciaram os estudos de Vygotsky.

## 2.2 Aspectos Históricos

Para entender a crise em que encontrava a Psicologia no início do século XX, Vygotsky desenvolveu estudos e concebeu que o sujeito desenvolve por meio de processos de mediação social das funções psicológicas. Para Vygotsky, a crise em que a Psicologia estava só poderia ser superada por meio de um estudo da história do desenvolvimento humano.

Vigoravam naquela época duas tendências, a psicologia como ciência natural, tendo como características a materialização, exteriorização, dentre outros pontos mais; e a psicologia como ciência mental, caracterizada pelo idealismo e descrições subjetivas.

Um grupo de pesquisas composto por Alexander Ramonivich Luria (1902-1977) e Alexei Nikolaievich Leontiev<sup>2</sup> (1904-1979), intrigados com esta questão, encabeçados por Vygotsky iniciaram seus estudos ainda no apogeu da Revolução Russa, com o objetivo de promover uma mudança na compreensão do ser humano, dando origem assim, a uma nova teoria, a Teoria Histórico-Cultural (THC), que é caracterizada em aspectos de mediação sintetizando<sup>3</sup> de maneira geral as duas correntes mencionadas.

Constataram que é por meio das relações com o outro, isto é, através das relações sociais é que o ser humano é capaz de se desenvolver historicamente devido a apropriação que faz da cultura humana e conseqüentemente no que esta se desenvolveu. Desta forma, para Vygotsky a compreensão do mundo dependeria da relação direta com o outro, pois é por meio desta interação que ocorre a formação de novos pensamentos e ideias.

Para Cole e Scribner (1984, p. 6 *apud* REGO, 2007, p. 29), Vygotsky pretendia construir uma teoria que sintetizasse as duas abordagens vigentes e ao mesmo tempo antagônicas na época, uma baseada na filosofia empirista e a outra na filosofia idealista. A proposta seria a abordagem de assuntos como:

[...] a identificação dos mecanismos cerebrais subjacentes a uma determinada função: a explicação detalhada da sua história ao longo do desenvolvimento, com o objetivo de estabelecer as relações entre formas simples e complexas daquilo que aparentava ser o mesmo comportamento; e, de forma importante, deveria incluir a especificação do contexto social em que se deu o desenvolvimento do comportamento.

---

<sup>2</sup> Estes foram os principais responsáveis pela fundamentação da nova linha teórica, a conhecida “troika”.

<sup>3</sup> Para maiores informações, Oliveira (2005) define síntese por: [...] A síntese de dois elementos não é a simples soma ou justaposição desses elementos, mas a emergência de algo novo, anteriormente inexistente. Esse componente novo não estava presente nos elementos essenciais: foi tornado possível pela interação entre esses fenômenos, num processo de transformação que gera novos fenômenos. (p. 23).

Alguns fatores históricos também contribuíram para a criação da Teoria Histórico-Cultural. Para Rego (2007), Vygotsky viveu no período pós-revolucionário, em que aconteceram grandes mudanças no governo russo que acabaram influenciando suas obras. A ciência passou a ser valorizada, pois havia uma grande expectativa que os avanços científicos trouxessem soluções para os problemas sociais e econômicos do povo soviético.

Além disso, a pesquisa acadêmica começa a abordar o desenvolvimento histórico dos objetos de estudo. Como esse clima de transformação aconteceu em todas as áreas do conhecimento, com a educação não foi diferente, ela passou a ser mais valorizada e havia uma grande exigência em achar uma solução para seus problemas como o analfabetismo, por exemplo.

Como já pontuamos, a obra de Vygotsky baseia portanto, no princípio de que o desenvolvimento do indivíduo ocorre como resultado de um processo histórico-cultural. Rego (2007, p. 26) então aponta que: “[...] a complexidade da estrutura humana deriva do processo de desenvolvimento profundamente enraizado nas relações entre história individual e social”.

Marx (1980), por exemplo, já distinguia o homem dos animais pela suas ações transformadoras. Por menor que seja a competência de um arquiteto, quando relacionado com o João de Barro, o trabalho daquele se destaca, pois é possível se apropriar da natureza, criando, recriando e transformando-a.

Objetivavam estudar o homem enquanto corpo, mente e social, membro da espécie humana e participante do processo histórico-cultural, pautado no bojo das ideias marxistas, refletindo como as mudanças históricas na sociedade influenciam a natureza humana. O homem se constitui homem por meio de suas ações no meio, sendo sua essência construída ao longo das relações sociais, isto é, por meio de suas ações (da tarefa).

Saviani (2007) corrobora que, com a modificação nas formas de organização da sociedade e com a divisão do trabalho em patrões e funcionários, ou respectivamente detentores do controle do trabalho e detentores das formas de execução do trabalho, a prioridade da educação passa a ser a preparação distinta destas duas classes, a das elites (intelectuais) e a da grande massa (força de trabalho).

Libâneo e Freitas (2007, p. 43), apontam que: “[...] para Vygotsky, a construção histórico-social do desenvolvimento psicológico humano ocorre no processo da atividade humana, por meio da apropriação da cultura e mediante a comunicação com outras pessoas”. Todo ser humano é resultado das interações com o meio, as características vão sendo formadas na medida que este relaciona com o outro. Sobre esta interação, Pino (2005) descreve sobre as

marcas que o homem deixa no outro, e vice-versa, usando um termo que bem descreve esta situação, as marcas do humano.

Para ilustrar essa ideia, se o nosso planeta fosse vítima de uma catástrofe que apenas poupasse as crianças pequenas e os objetos da cultura e fizesse desaparecer todos os adultos e as crianças maiores, a vida humana continuaria, mas a história da humanidade teria que recomeçar, pois, sem ter quem ensinasse as crianças o uso dos tesouros da cultura, eles continuariam a existir fisicamente, mas não poderiam ser apropriados por elas: as máquinas deixariam de funcionar, os livros ficariam sem leitores, as obras de arte perderiam sua função estética. (MELLO, 2004, p. 139).

Nesta questão, Oliveira (1993, p. 23 *apud* REGO, 2007, p. 41) argumenta que o objetivo dos estudos de Vygotsky, e de seus seguidores em seu grupo de pesquisa, era de integrar “[...] numa mesma perspectiva, o homem enquanto corpo e mente, enquanto ser biológico e social, enquanto membro da espécie humana e participante de um processo histórico”. Devemos entender o homem como sendo simultaneamente obra do meio e agente de transformação deste. A sociedade é caracterizada por ser uma construção histórica e ao mesmo tempo produto de ações conjuntas entre os homens, tendo como resultado final o trabalho, que será interpelado como atividade humana.

Verificada a ideia de que a mente humana é formada por aspectos sociais e culturais, construíram então a Teoria Histórico Cultural, que será objeto de estudo do próximo tópico, abrindo novas perspectivas de análises na Educação para o processo de construção de conhecimento.

### 2.3 Teoria Histórico-Cultural

A Teoria Histórico-Cultural, também denominada de abordagem sócio -interacionista ou enfoque sócio - histórico, traz em seu bojo a concepção de que todo sujeito se desenvolve através das relações que estabelece com o outro.

Desde quando nascemos, somos dependentes do outro e entramos em um processo histórico que, de um lado, são oferecidas informações sobre o mundo e visões já construídas a respeito dele, e de outro lado, permite a construção de uma visão subjetiva sobre o mesmo. Para Vygotsky (1984, p. 21 *apud* REGO, 2007, p. 38) a Teoria Histórico-Cultural tem como intuito “Caracterizar os aspectos tipicamente humanos do comportamento e elaborar hipóteses de como essas características se formaram ao longo da história humana e de como se desenvolvem durante a vida de um indivíduo”.

Marta Khol (2012) afirma que “Para Vygotsky, o sujeito só se desenvolve porque ele aprende!”. Demenech e Paula corroboram com esta premissa e afirmam que:

Para Vigotski um único bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento, pois, os processos de desenvolvimento precisam da ajuda do ensino, para que a educação possa desenvolver estes processos psicológicos, assim, determinar quais são os bens e a atividade própria do homem. Ensinando ao aluno a pensar e apropriar-se do conhecimento elaborado. (2009, p. 12).

Rego (2007, p. 71) reforça esta ideia ao apontar que:

[...] é o aprendizado que possibilita e movimenta o desenvolvimento (...) o aprendizado é o aspecto necessário e universal, uma espécie de garantia do desenvolvimento das características psicológicas especificamente humanas e culturalmente organizadas.

Para o próprio Vygotsky, “[...] o único tipo positivo de aprendizado é aquele que caminha à frente do desenvolvimento, servindo-lhe de guia; deve voltar-se não tanto para as funções já maduras, mas principalmente para as funções em amadurecimento” (2013, p. 130)

Para Rego (2007) Vygotsky concebe a conquista da linguagem como fator imprescindível no desenvolvimento do homem. Neste processo de desenvolvimento do sujeito, a linguagem tem papel de suma importância na determinação de como este vai aprender a pensar, uma vez que formas avançadas de pensamento estão na cultura e são transmitidas à criança por meio de palavras, isto é, por meio da linguagem oral. Também é por meio da aquisição da linguagem escrita e falada que o indivíduo adquire outras maneiras de se relacionar com o outro e com o mundo que o cerca.

As obras de Vygotsky, segundo Rego (2007), relacionam questões de âmbitos educacionais, fazendo um paralelo entre desenvolvimento e aprendizagem. Vygotsky acredita que a aprendizagem ocorre antes da criança chegar à idade escolar. Todavia o aprendizado fornecido na escola introduz a formação de conceitos novos ao seu desenvolvimento; toda aprendizagem resulta do processo de internalização, podendo a criança apropriar de outros conceitos como valores, crenças etc.

O processo de internalização na Teoria de Vygotsky é fundamental para o desenvolvimento do funcionamento psicológico humano. Esta envolve uma atividade externa que deve ser modificada para tornar-se uma atividade interna. Demenech e Paula (2009, p. 9) a conceituam como: “[...] o processo pelo qual o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes, valores, entre outros, a partir de seu contato com a realidade, meio ambiente e com outras pessoas, sendo essa interação essencial”.



Ao mesmo tempo em que o ser humano transforma o mundo para atender as suas necessidades, ele acaba transformando a si mesmo. Rego (2007, p. 41) esclarece esta ideia quando afirma que: “[...] quando o homem modifica o ambiente através de seu próprio comportamento, essa mesma modificação vai influenciar seu comportamento futuro”.

Além disso, o aprendizado é caracterizado na obra de Vygotsky, da seguinte forma:

O aprendizado é mais do que a aquisição de capacidade para pensar; é a aquisição de capacidade para pensar sobre várias coisas. O aprendizado não altera nossa capacidade global de focalizar a atenção; ao invés disso, no entanto, desenvolve várias capacidades de focalizar a atenção sobre várias coisas. Vygotsky (1994, p. 108 *apud* DEMENECH; PAULA, 2009, p. 9).

Pelo exposto, podemos fazer um paralelo que, de acordo com Vygotsky, a aprendizagem antecede o desenvolvimento, ou seja, o indivíduo só se desenvolve porque aprende, pois é a partir desta que o sujeito, no caso o aluno, pode fazer generalizações, comparações, elaborando assim suas próprias conclusões.

Uma vez que a criança tenha aprendido a realizar uma operação, ela passa a assimilar algum princípio estrutural cuja esfera de aplicação é outra que não unicamente a das operações do tipo daquela usada como base para assimilação do princípio. Consequentemente, ao dar um passo no aprendizado, a criança dá dois no desenvolvimento, ou seja, o aprendizado e o desenvolvimento não coincidem. Vygotsky (1994, p. 109 *apud* DEMENECH E PAULA, 2009, p.11).

De maneira geral, quando tratamos de aprendizagem percebemos que, de acordo com a análise de Vygotsky, o aprendizado quando bem estruturado e organizado acaba por resultar em desenvolvimento mental. Duarte (2012) diz que: “[...] nada disso se apresenta ao indivíduo de uma forma imediata, tudo isso se apresenta aos indivíduos pela mediação das outras pessoas, ou seja, pela mediação da relação com as outras pessoas”.

Dizer que um ser humano é um ser social, é dizer também que o mesmo é um ser cultural e isto ainda implica afirmar que o mesmo é um ser histórico. Duarte (2012) mostra que: “[...] uma das características da cultura, é que a cultura acumula atividade humana”. Tudo aquilo que é cultural contém atividade humana acumulada. Logo, a linguagem é um exemplo de atividade humana.

Um dos grandes saltos dados no desenvolvimento humano em relação aos outros animais ocorreu quando ele adquiriu a linguagem, ou seja, quando aprendeu a verbalizar seus pensamentos. É por meio das palavras que o ser humano pensa. A generalização e a abstração portanto só se dão por meio da linguagem e é por meio delas que ocorre a organização do

pensamento. Rego (2007, p. 42) pontua que “A linguagem é um signo mediador por excelência, pois ela carrega em si os conceitos generalizados e elaborados pela cultura humana”.

Sendo assim, a linguagem tem um papel de suma importância na organização do pensamento, pois o simples fato de fazermos uma marca na mão com o intuito de lembrarmos de algo é uma forma de linguagem que se processa através do pensamento.

Segundo Duarte (2012), há uma ideia de que o produto é uma coisa e atividade humana é outra, então temos a seguinte questão: conhecimento é um produto ou atividade humana? Muitos professores se preocuparam com a questão da transmissão de conteúdos, transmissão esta que facilita a percepção do conhecimento como algo rígido e imutável. Contudo, deveriam perceber e levar os seus alunos a perceberem que este é resultado de interações humanas, logo só pode ser considerado como um produto que advém da atividade humana. Os indivíduos deveriam, assim, vivenciar a atividade, o processo de construção do conhecimento.

Neste sentido, Duarte (2012) denomina esta questão de dicotômica, por separar o produto da atividade humana, pois comumente vemos o produto da atividade como algo morto, estático, imutável, isto é, que não produz conhecimento, todavia, ele não é morto, pois contém atividade humana.

Quando o indivíduo se apropria da linguagem, este apropria também de uma série de processos de atividades humanas ligadas às linguagens, e estes processos passam a ganhar vida na utilização que o indivíduo faz. Ao lermos um livro, por exemplo, nos apropriamos de uma atividade humana, pois o autor do mesmo ao escrevê-lo usou seus conhecimentos, que nos foram transmitidos por meio da leitura. Além disso, o conhecimento que o autor tem é resultado de uma série de atividades humanas de outras pessoas.

Duarte (2012) discorre que todo ser humano em sua individualidade é a síntese de múltiplas experiências, relações sociais. Logo, quando apropriamos dos produtos culturais trazemos também para nossas vidas a vida que está objetivada nos produtos culturais, por exemplo, o livro. A vida do indivíduo e a vida em sociedade é mediada por meio da cultura.

O homem por meio das relações com o meio é capaz de produzir não só conhecimento, mas meios e produtos que facilitem o viver. E é isso que nos diferencia dos animais, pois somos seres pensantes, criativos e acima de tudo, somos seres que têm a capacidade de produzir. Bernardes (2010, p. 301) aponta dois fatores imprescindíveis no processo de produção do homem: “No movimento de produção dos meios de subsistência, o trabalho e a comunicação são considerados os elementos essenciais no processo de constituição e de transformação da natureza do homem”.

Nesse processo de constituição humana, Bernardes (2010, p. 301) advoga que o processo de hominização ocorre “[...] diante da necessidade de subsistência do próprio homem, pela luta em manter-se vivo. O homem não só se adapta ao meio, mas, principalmente, promove transformações no meio em que vive”.

Sobre a Teoria de Vygotsky, Demenech e Paula (2009, p. 3), desta forma apontam que esta:

[...] supera a compreensão de que o ser humano ao nascer, traz um conjunto de aptidões e capacidades. Proporciona-nos um pensamento de que a pessoa vai se desenvolver de acordo com o meio em que vive e suas possibilidades e potencialidades de desenvolvimento. Pois cada ser humano adquire habilidades, qualidades disponíveis e necessárias para o seu tempo a partir da sua socialização na cultura. [...].

A Teoria Histórico-Cultural valoriza o outro na construção do saber. Comumente imaginamos uma sala de aula, composta de alunos em carteiras enfileiradas, em que o professor é o dono do saber e os alunos ficam ouvindo e, quando necessário, fazendo anotações a respeito da aula e às vezes fazendo questionamentos. Todavia, a teoria possibilita conceber a sala de aula com uma visão diferente, acreditando que todos devem ter o direito e a possibilidade de falar, levantar suas hipóteses, conjecturas, acarretando conclusões que ajudem o aluno a conhecer a si próprio, e a perceber o outro como partes integrantes do processo de construção de conhecimento adquirido por meio da formação do pensamento teórico que será visto adiante.

## 2.4 Formação de Conceitos

O desenvolvimento humano está ligado à apropriação dos conceitos científicos. A formação de conceitos é um dos assuntos de extrema importância na obra e na pesquisa de Vygotsky e de seus seguidores, em especial Luria, por englobar as principais ideias de sua teoria do desenvolvimento humano: pensamento e linguagem, relação indivíduo e o outro (mediação) e o processo de internalização.

Rego (2007, p. 75-76), quanto à obra de Vygotsky, relata que esta “[...] integra e sintetiza suas principais teses acerca do desenvolvimento humano: as relações entre pensamento e linguagem, o papel mediador da cultura na construção do modo de funcionamento”.

Segundo Rego (2007) Vygotsky identificou dois tipos de conceitos no processo de desenvolvimento do sujeito: os construídos de forma subjetiva, isto é, pautados na experiência que a criança tem de acordo com o meio em que vive antes de entrar na escola, isto é, estes são conceitos que fazem parte do senso comum denominando-os de conceitos cotidianos ou

espontâneos; e os conceitos construídos após a entrada da criança na escola, mais precisamente dentro da sala de aula, isto é, os que são elaborados a partir das intervenções pedagógicas, os conceitos científicos. Fica claro o quanto é importante o papel do ensino escolar para a formação dos conceitos científicos e, conseqüentemente, para o desenvolvimento dos estudantes.

Para Damazio (2011, p. 10): “O aprofundamento para aquilo que o aluno não sabe – conhecimento científico - deve ser propiciado pelas mediações e interações estabelecidas na atividade de ensino aprendizagem”. Aprender conceitos leva ao desenvolvimento de capacidades que permitem ao estudante pensar num objeto não mais de forma imediata e visual, mas de forma mediada.

Vygotsky (1993, p. 253 *apud* DAMAZIO, 2011, p. 3) define os conceitos fazendo um paralelo com movimento, em que o mesmo:

[...] cria uma série de estruturas necessárias para que surjam as propriedades inferiores e elementares dos conceitos. Por sua vez, o conceito científico, depois de ter percorrido de cima para baixo certo fragmento de seu caminho, abre espaço para o desenvolvimento dos conceitos cotidianos, preparando de antemão uma série de formações estruturais necessárias para dominar as propriedades superiores do conceito. [...] Os conceitos cotidianos se desenvolvem de forma ascendente, de baixo para cima, em direção aos conceitos científicos. Estes, por sua vez, se desenvolvem de forma descendente, de cima para baixo, em direção aos conceitos cotidianos.

Apesar de terem suas diferenças, os mesmos estão diretamente ligados e se completam por fazerem parte de um único processo: a formação de conceitos. Os conceitos científicos, em outras palavras, atuam como facilitadores ou generalizadores do entendimento dos conceitos cotidianos, por estes serem carregados de limitações (senso comum). Para Moysés (2009, p. 38) “Vygotsky chegou à conclusão de que o domínio de um nível mais elevado na esfera dos conceitos científicos eleva, por sua vez, o nível dos conceitos espontâneos”. Quando nos deparamos com um conceito, ainda desconhecido, a criança faz relação com os conhecimentos já consolidados com o intuito de dar significado ao novo, através do conhecido. Podemos considerar duas formas básicas para a apropriação de conceitos, a coletiva e a individual, que estão sendo discutidas ao longo deste trabalho.

Ensinar conceitos científicos na escola, significa capacitar os alunos a pensar cientificamente e criticamente. Quanto ao ensino de Matemática, por exemplo, esperamos que os alunos apropriem-se dos conceitos matemáticos desenvolvendo ações e capacidades mentais para realizar outras tarefas.

Sobre o processo de ensino-aprendizagem tendo como foco a apropriação dos conceitos científicos, Moysés (2009, p. 35) caracteriza a função do professor, argumentando que:

A principal tarefa do professor ao transmitir ou ajudar o aluno a construir esse tipo de conceito é a de levá-lo a estabelecer um enlace indireto com o objeto por meio das abstrações em torno das suas propriedades e da compreensão das relações que ele mantém com um conhecimento mais amplo.

Rego (2007), em outras palavras, corrobora esta ideia quando afirma que a aula tradicional não cria um ambiente propício à aprendizagem, apesar de também ensinar. Porém não podemos ensinar conceito, mas devemos pensar em maneiras de levar os alunos a comparar, discutir e estabelecer relações para que eles próprios possam tirar suas conclusões sobre tal conceito. Pensando nisto, a autora ainda cita algumas características indispensáveis na compreensão de um determinado conceito, sendo estas:

Para aprender um conceito é necessário, além das informações recebidas do exterior, uma intensa atividade mental por parte da criança. Portanto, um conceito não é aprendido por meio de um treinamento mecânico, nem tampouco pode ser meramente transmitido pelo professor ao aluno. (REGO, 2007, p. 78).

O ambiente escolar ainda deve ser favorável evitando a prática do “siga o modelo”, práticas estas que nada acrescentam ao conhecimento dos alunos, a não ser que estes sejam imitadores de ações, sem compreenderem o real significado que está por trás das técnicas. A formação de conceitos não depende exclusivamente do aluno, mas também, do ambiente em que ele está inserido, que deve exigir e estimular seu intelecto.

Segundo Moraes e Moura (2009, p. 107): “A escola, nesta perspectiva, é considerada o espaço por excelência de desenvolvimento dos conceitos científicos, a instituição capaz de fazer a mediação entre os conceitos cotidianos e o científico”.

Sendo a Teoria Histórico-Cultural pautada no processo de mediação e internalização de conceitos, cabe agora relacionar isto com a sala de aula, em que o professor deve enxergar seu aluno não como um mero aprendiz, mas sim companheiro de trabalho, companheiro de estudo e de pesquisa. O processo de mediação não pode se dar de cima para baixo ou vice-versa, mas sim pela união dos indivíduos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem em prol dos mesmos objetivos.

Neste sentido, Moysés (2009, p. 37-38) enfatiza que Vygotsky resumiu a essência de um ensino voltado para a compreensão e o entendimento, identificando cinco características sendo elas: “*trabalhando com o aluno*”, processo este discutido anteriormente; “*explicou*” e “*deu informação*”, explicar algum conceito não de forma expositiva, mas sim de forma a resgatar as informações já consolidadas pelos alunos, procurando fazer sempre um paralelo entre estas e as futuras; “*questionou e corrigiu o aluno*”, não somente identificar o erro, a

dificuldade, mas ao identificar, propor questionamentos de forma que o próprio aluno perceba o seu erro, e se caso não o perceber, fazer a correção; “... e o fez explicar”, caráter imprescindível no processo educacional, ocorre quando é pedido aos nossos alunos que expliquem algo com suas próprias palavras.

A profissão docente exige, pois, do educador, uma compreensão ampla dos conceitos e das formas de ensino, afim de dar subsídios para que o aluno consiga apropriar. Nesta interação direta entre aluno/professor, em especial quando falamos sobre conceitos espontâneos, cada aluno leva para a escola um amplo conhecimento de cultura diverso - bagagem pessoal subjetiva acumulada ao longo dos tempos - necessitando que os professores estejam atentos à realidade e cultura dos mesmos. Para Moysés (2009, p. 36) isto “[...] implica reconstrução do saber mediante estratégias adequadas, nas quais o professor atue como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento”.

A formação de conceitos não ocorre de forma simples, sendo um processo longo e complexo, que vai se aperfeiçoando com o passar dos tempos. Cabe então ao fazer do professor em sua constante prática se ver e se tornar um mediador, levando seus alunos a construírem e elaborarem a ideia do objeto e formularem seus próprios conceitos.

Não podemos entender e conseqüentemente trabalhar os conceitos em sala de aula de forma a mostrar aos alunos os conceitos já prontos, mas sim de uma forma que propicie a construção destes. A atividade de aprendizagem deve ser pensada no bojo de elaboração conceitual, não sendo necessário trabalhar os conteúdos de forma isolada, por exemplo, o fato de estudarmos geometria não pode ser compreendido de forma separada de conceitos de aritmética; logo, um conceito pode abarcar muitos conteúdos e não necessariamente de uma única disciplina isolada. Nesta problemática refletimos que:

Vale considerar que a função social da escola é oportunizar a apropriação e elaboração dos conceitos científicos como meio de exercício da cidadania. Na elaboração de conceitos deve-se levar em consideração a relação espaço/tempo, e o contexto das relações do sujeito com a natureza e com o seu universo social. Considerando ainda que todos estes aspectos são interdependentes. (SCHEMES, <http://jorgeschemes.blogspot.com.br/2007/05/elaborao-de-conceitos.html> 04, abr, 2013).

Esse repensar na organização do ensino remete também a um repensar na organização e estrutura da tarefa, buscando tarefas interessantes para os alunos, fazendo com que eles se sintam motivados a participarem ativamente do processo ensino-aprendizagem. Interessantes não no sentido de dispersar do conteúdo a ser trabalhado, mas em perceber que o aluno não sentirá bem em sala ao ensinarmos algo que já saiba ou algo que seja muito complexo para a

sua compreensão. Daí a necessidade da questão das relações entre os indivíduos, em que o professor, ao organizar o ensino, sua aula deverá sempre priorizar o diálogo, gerando uma proximidade dos alunos logo de início, de maneira coletiva, para então agir individualmente. Moraes e Moura (2009) ressaltam que o educador, ao organizar o ensino de forma propiciar um ambiente de apropriação de conceitos, também se desenvolve.

Neste sentido é imprescindível levar professor e aluno a assumirem seus respectivos papéis de agentes ativos na construção do seu próprio conhecimento, tendo como ponto inicial conhecimentos que lhes são pertinentes, cabendo ao professor o papel de organizador do ensino e tendo no mesmo a sua principal atividade.

O indivíduo só desenvolve porque ele aprende. Ele só será capaz de desenvolver socialmente, culturalmente e historicamente por estar inserido em um ambiente de aprendizagem.

A escola desempenhará bem seu papel, na medida em que, partindo daquilo que a criança já sabe (o conhecimento que ela traz de seu cotidiano, suas ideias a respeito dos objetos, fatos e fenômenos, suas “teorias” acerca do que observa no mundo), ela for capaz de ampliar e desafiar a construção de novos conhecimentos, na linguagem vygotskyana, incidir na zona de desenvolvimento potencial dos educandos. Desta forma poderá estimular processos internos que acabarão por se efetivar, passando a constituir a base que possibilitará novas aprendizagens (REGO, 2007, p. 108).

O ambiente escolar deve facilitar o caminhar dos conceitos espontâneos para os científicos, ensinando o aluno a pensar, fazendo com que este se mostre de forma autônoma construtor de conceitos elaborados. Contudo, o aluno pode não desenvolver conceitos de forma totalmente autônoma por contar com o auxílio e a colaboração dos demais envolvidos neste processo de ensino.

Para isto, o professor deve sempre organizar o ensino, visando a reflexão de sua prática, no intuito de melhorá-la, tendo, portanto, a exigência de um bom planejamento. É evidente que no processo de ensino-aprendizagem a boa relação aluno-professor é imprescindível para o desenvolvimento deste.

Na Teoria de Vygotsky, o ambiente escolar tem um papel de suma importância na assimilação de conceitos, em especial os científicos, quando propõem tarefas de investigação, de pesquisa, atividades desafiadoras como um todo, devido à grande necessidade que se tem de procurar meios que levem os alunos a pensar, e, além disso, fazer com que eles sintam esta vontade de pensar. Como aponta Moysés (2009, p. 45):

As pesquisas evidenciaram que aqueles métodos que mais favorecem o desenvolvimento mental são os que levam o aluno a pensar, que o desafiam a ir sempre

além. São sobretudo aqueles que o levam a começar um processo por meio de ações externas, socialmente compartilhadas, ações que irão, mediante o processo de internalização, transformando-se em ações mentais.

Assim, é necessário que o professor crie alternativas que propiciem aos seus alunos a pensarem, atitude esta, no sentido de que os alunos compreendam a origem do conceito e suas aplicações, além da importância deste para a resolução de problemas matemáticos. Rego (2007, p. 79) caracteriza ainda que um dos papéis da escola é de facilitar “[...] que o indivíduo tenha acesso ao conhecimento científico construído e acumulado pela humanidade”. E este acesso deve ser resultado de troca de ideias, compartilhamento de informações, isto é, por meio da interação aluno-professor e dos alunos com os próprios alunos, pois somente a partir desta troca de informações é que apropriação dos conceitos ocorre.

Nesta problemática, Vygotsky (1984, p. 59-65 *apud* LIBÂNEO; FREITAS, s/ano, p.3), pontua que:

[...] as funções psíquicas superiores neles envolvidas se efetivam primeiramente na atividade externa (interpessoal) que, em seguida, é internalizada na atividade individual, regulada pela consciência. No processo de internalização da atividade há a mediação da linguagem, em que os signos adquirem significado e sentido.

Moysés (2009) ainda ressalta o fato de uma mesma palavra ter diferentes significados em diversas situações, gerando assim desentendimento entre aluno e professor, por exemplo. Esclarece então que, para que haja compreensão nas relações interpessoais, deve haver compartilhamento de significados. Outro aspecto de suma importância a ser abordado, é que o conhecimento ocorre do interpessoal para o intrapessoal.

Desta forma, fica claro a postura e a função do professor em sala de aula, devendo sempre pautar pelo processo de mediação entre o aluno e o objeto de estudo. A educação deve ser baseada em fatores da interação aluno e professor.

Os conceitos fazem parte de uma fundamentação histórico-cultural sendo componente de um processo. Educadores não podem ensinar conceito, todavia devem levar os alunos a comparar, discutir e estabelecer relações para que eles cheguem a suas próprias conclusões. Sempre que necessário, o aluno precisa valorizar a presença do outro, pois a troca de ideias, de informações, enfim o compartilhamento de ideias pode gerar grandes saltos. O professor em sua mediação precisa, pois, criar meios e possibilidades que favoreçam a independência e a criatividade do aluno, pois

Até agora, o aluno sempre descansava no esforço do professor. Olhava tudo com seus olhos e julgava com sua mente. Está na hora de ele usar seus próprios pés e



compreender que o professor pode ensinar muito pouco conhecimento ao aluno, assim como não é possível uma criança aprender a caminhar por meio das aulas, nem com a mais cuidadosa demonstração de marcha artística de um professor. Deve-se impulsionar a própria criança a andar e cair, sofrer a dor dos machucados e escolher a direção. E o que é verdade com relação ao caminhar – que só pode aprender com as próprias pernas e com as próprias quedas – também pode ser aplicado a todos os aspectos da educação. (VIGOTSKI, 2003, p.298-299).

As informações e experiências subjetivas de cada aluno servem para reelaborar e ampliar o conceito que está sempre em movimento. E é nesse movimento de ampliação que apresentamos o tópico seguinte.

## 2.5 Zona de Desenvolvimento Proximal

A Zona de Desenvolvimento Proximal, é um conceito de suma importância para o processo ensino-aprendizagem, na medida que reforça o papel da mediação pedagógica que só ocorre no meio escolar.

Moysés (2009, p. 52) pontua que o fato dos alunos compartilharem ideias no sentido de auxílio mútuo com os colegas e o próprio professor, os ajudarão na compreensão do assunto ou do conceito discutido, pois “[...] verifica-se um aumento no grau de articulação de precisão na verbalização da tarefa quando ele tem de transmiti-la para os colegas”. Podendo acarretar a criação de zonas de desenvolvimento proximal bidirecional, o que segundo Moysés (2009), advém da atuação do outro na compreensão do determinado assunto, isto é, neste caso cada aluno é responsável pela criação de Zonas de Desenvolvimento Proximais (ZDPs) no outro.

O professor, então em pesquisa, ao fazer uso da Zona de Desenvolvimento Proximal, observa os estágios de desenvolvimento dos alunos, planeja mudanças que são necessárias ao ensino, para atingir o seu objetivo.

O processo de ensino pautado na psicologia histórico-cultural valoriza as intervenções pedagógicas na construção do conhecimento, intervenções estas, denominadas por Vygotsky de mediação, o que mais tarde acontecerá por meio da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Este é um conceito tardio na obra de Vygotsky. Para ele não bastava verificar o que a criança já havia consolidado, mas sim na possibilidade de compreender possíveis construções futuras, as quais ele caracterizou em dois níveis de desenvolvimento, o real ou efetivo e o desenvolvimento potencial.

Segundo estes autores, Vygotsky observou existirem atividades que podem ser realizadas sem a ajuda de outras pessoas, por exigirem o uso de conceitos já internalizados pelo indivíduo, ao que denominou nível de desenvolvimento real ou efetivo. Por outro lado, há algumas atividades em que necessitamos da ajuda do outro, a qual denominou de nível de desenvolvimento potencial.

Em relação à ZDP, Marta Khol (2012) afirma que “A ZDP, define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas amadurecerão. Está, em outras palavras, em estágio embrionário”.

O nível de desenvolvimento potencial é aquele em que a criança ainda necessita do auxílio, da colaboração, da ajuda do outro, sendo este muitas vezes mais experiente, pois somente através desta ajuda é que o sujeito será capaz de realizar as atividades que lhes foram dadas. Rego (2007, p. 73) afirma que “Este nível é, para Vygotsky, bem mais indicativo de seu desenvolvimento mental do que aquilo que ela consegue fazer sozinha”.

Moysés (2009, p. 34) cita ações e práticas que possibilitam o desenvolvimento do nível de desenvolvimento potencial:

Perguntas-guia, exemplos e demonstrações constituem o cerne dessa ajuda. Trata-se, porém, de um conceito amplo, que implica imitação de um modelo dado socialmente não no sentido de copiá-lo exatamente, mas algo que envolve uma experimentação construtiva. Ou seja, a criança realiza ações semelhantes à do modelo de uma forma construtiva imprimindo-lhes modificações. Disso resulta uma nova forma, embora não exatamente igual, mas inspirada no modelo. Desse processo resulta a internalização da compreensão do modelo.

O nível de desenvolvimento real ou efetivo caracteriza-se por ações que as crianças já dominam, isto é, ações estas que as mesmas já são capazes de fazer sem o auxílio de alguém mais experiente, pois elas já apropriaram dos conceitos de referida atividade, são quando os conceitos já estão consolidados. Rego (2007) cita que em pesquisas educacionais, comumente são consideradas somente ações deste nível como produtivas.

Duarte (2012), afirma que Vygotsky, juntamente com os seus seguidores, caracterizam o processo de desenvolvimento da criança por meio de dois processos, o biológico e o cultural. Até um ano e meio de vida, a criança raciocina de modo bastante parecido com um chimpanzé, raciocínio este, caracteristicamente prático. Ao mesmo tempo, a criança está em um processo de apropriação da linguagem. Entretanto, a partir do momento em que a mesma apropria-se da linguagem falada, ocorre uma aceleração no desenvolvimento do raciocínio da criança. O ser humano então apropria da cultura por meio da comunicação que tem com as outras pessoas, o que os diferencia dos demais animais. Moretti, Asbahr e Rigon (2011, p. 478) discorrem que

“Diferentemente dos animais, o homem cria necessidades que têm por objetivo não apenas garantir a sua existência biológica, mas principalmente sua existência cultural”.

Assim, a distância entre o raciocínio de uma criança com a do chimpanzé passa a ser incomensurável devido à linguagem. A linguagem humana contém atividade condensada, acumulada. Segundo Rego (2007), Vygotsky e seus seguidores identificaram de maneira sucinta três diferenças básicas comportamentais dos seres humanos e dos animais.

A primeira é que os animais agem puramente de acordo com os aspectos biológicos, enquanto os seres humanos se baseiam em grande parte em valores e princípios. Todavia é evidente que há situações em que os aspectos biológicos sobressaem, pois estamos falando de desenvolvimento humano. Rego (2007, p. 59) acrescenta que:

Inicialmente, sua atividade psicológica é bastante elementar e determinada por sua herança biológica. Vygotsky ressalta que os fatores biológicos tem preponderância sobre os sociais somente no início da vida da criança. Aos poucos das interações com seu grupo social e com os objetos de sua cultura passam a governar o comportamento e o desenvolvimento de seu pensamento.

A segunda é que os animais agem de acordo com os instintos sensoriais, enquanto os seres humanos agem de forma racional; a terceira e última, é que diferentemente dos seres humanos, os animais são incapazes de aprender, transmitir ações e experiências de outrem, reforçando a ideia de que “[...] o desenvolvimento do psiquismo humano é determinado pelas leis da evolução biológica e está submetido às leis do desenvolvimento sócio-histórico” (REGO, 2007, p. 48).

Quando a criança se apropria da linguagem falada, está apropriando de algo de milhares de anos de transformação, sujeitas a imensuráveis contribuições humanas, não sendo assim necessário percorrer todo este processo novamente. Duarte (2012) afirma que:

O indivíduo no espaço de uma vida não pode percorrer toda a experiência da humanidade, mas o indivíduo pode sim se apropriar das sínteses dessa experiência que nos são transmitidas nos elementos dos fenômenos da cultura. Portanto quando uma criança se apropria do conhecimento, seja a linguagem, seja o mundo dos objetos, que são utilizados no cotidiano, seja das formas de comportamento, de relacionamento que as pessoas estabelecem com a criança, ela está se apropriando de sínteses de atividade humana, e isso lhe possibilita dar enormes saltos de desenvolvimento.

Isso mostra a existência da cultura em dois grandes vieses, sendo eles, objetivamente e subjetivamente, repletos de acúmulo de atividades e experiências humanas, em que o sujeito se apropria, internaliza aquilo que foi produzido pelos outros, e este processo de internalização da atividade humana está acumulado de cultura. Vygotsky (2013) ressalta que:

O caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa através de outra pessoa. Essa estrutura humana complexa é o produto de um processo de desenvolvimento profundamente enraizado nas ligações entre história individual e história social (p. 30).

Além disso, é necessário essa percepção por parte de nossos alunos, para compreenderem o conceito como algo que está sempre em movimento, ao invés de interpretá-lo como algo estático, pronto e acabado. Sendo assim, no tópico a seguir discorreremos sobre as relações entre a Teoria de Vygotsky com o ensino-aprendizado de Matemática.

## 2.6 Aproximações da Teoria Histórico-Cultural para o ensino-aprendizagem da Matemática

As aproximações do enfoque histórico-cultural com a Educação Matemática surgiram por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, na Alemanha, em 1976, e tem sido uma das linhas de pesquisa de bastante destaque.

O ensino-aprendizagem de Matemática centrado simplesmente no livro didático e em atividades mecânicas tem diminuído o interesse dos educandos pela disciplina. Sabemos que não existe um modelo ou uma teoria de aprendizagem ideal e perfeita para o ensino, mas podemos encontrar outros meios para tornar o ensino-aprendizado mais significativo, dinâmico e acessível, fazendo com que o aluno tenha prazer em realizar o que é proposto.

Atividades diferenciadas, trabalhadas em grupos, jogos ou uso das tecnologias são recursos que podemos usar afim de que os alunos possam se envolver na proposta pela mediação pedagógica do professor.

Sobre o papel da mediação, Vygotsky compreende que o pensamento não é formado com autonomia e independência, isto é a construção do pensamento não pode ser entendida como unilateral, mas sim sob condições existentes, sob a mediação dos signos e dos instrumentos culturais que se apresentam historicamente e estão socialmente disponíveis. Mediação que se dá por meio das relações sociais com o outro. A Teoria de Vygotsky, deixa claro que o desenvolvimento do sujeito é mediado pelos signos e pelo outro.

Rego (2007, p.50) aponta que: “Vygotsky distingue dois elementos básicos responsáveis por essa mediação: o *instrumento* que tem a função de regular as ações sobre os objetos e o *signo*, que regula as ações sobre o psiquismo das pessoas” (grifos do autor).

Rego (2007, p. 55) informa que:

[...] os sistemas simbólicos (entendidos como sistemas de representação da realidade), especialmente a linguagem, funcionam como elementos mediadores que permitem a comunicação entre os indivíduos, o estabelecimento de significados compartilhados

por determinado grupo cultural, a percepção e interpretação dos objetos, eventos e situações de mundo circundante. É por essa razão que Vygotsky afirma que os processos de funcionamento mental do homem são fornecidos pela cultura, através da mediação simbólica.

Os trabalhos em grupos portanto, o uso de jogos e das tecnologias são formas de aplicarmos a Teoria de Vygotsky e criar situações propícias de aprendizagem, em que uma determinada pessoa (aluno/professor) assume o papel de agente na construção do conhecimento do outro.

O processo de construção de conhecimento depende do compartilhamento de ideias, por ser através das relações que o homem consegue se apropriar do conhecimento. Damazio (2011, p. 14) acrescenta que:

A apropriação de significações conceituais implica no uso não só de signos, mas também da palavra. Isso exige a diferenciação e, ao mesmo tempo, a articulação entre o objeto matemático, sua representação numérica/algébrica/geométrica e sua representação escrita por palavras da língua materna. Passar de uma representação numérica para uma palavra é um ato de profunda abstração. Requer a internalização do significado conceitual traduzido na palavra.

O desenvolvimento intelectual da criança ocorre em função das interações sociais e condições de vida. Por intermédio dos pais, professores, amigos, a criança vai aos poucos conhecendo a cultura e o comportamento dos outros, do meio em que vive e se necessita da ajuda de alguém, com o passar dos tempos de maneira naturalmente, ele se apropria desta compreensão sem intermediação do outro.

A construção do sujeito é mediada pelas relações interpessoais que esta adquire com o meio, para então serem internalizadas. De maneira geral, não podemos aprender sem estabelecer relações com outros conceitos já existentes, daí a necessidade do professor constantemente reavaliar sua prática, com o objetivo de pensar em tarefas, situações que facilitem a compreensão do conceito.

A falta de motivação dos alunos, ligada a questões sociais, econômicas, políticas, culturais e ao próprio posicionamento ideológico do professor, contribuem juntamente com as aulas expositivas e rotineiras, sem o uso de materiais pedagógicos atrativos, para o agravamento da situação. Estes fatores, em outras palavras, são os principais causadores do desinteresse, do baixo rendimento escolar e da dificuldade de aprendizagem. O próprio Vygotsky afirma que,

A experiência prática mostra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança,

semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo. (2013, p. 104).

A organização do ensino que privilegie a troca de ideias e crie possibilidades de realizar as atividades em parceria é o eixo norteador desse trabalho. A Matemática pode ser uma disciplina interessante e atrativa desde que repensemos as práticas e os métodos de ensino

A compreensão do conceito de ZDP é indispensável para atuação docente, pois permite a compreensão do desenvolvimento do sujeito, identificando os conceitos que estão em formação e os já consolidados, repensando tarefas que facilitem este processo de desenvolvimento. Souza (2014, p. 84) aponta que, “[...] o papel desempenhado pelo professor é fundamental no processo de aquisição de conhecimentos pelos alunos, sobretudo a partir da identificação e atuação na ZDP dos seus alunos.”. Esta deve ser então uma premissa para o professor e a escola que visam ser atuantes, com o objetivo de melhorar a situação.

Cabe ao educador notar o que o aluno já sabe e em que ele precisa avançar. É neste sentido que o professor assume a postura de mediação pedagógica. Além da mediação pedagógica, é de suma importância, como já vimos, a interação entre os alunos, já que esses têm a possibilidade de compartilhar ideias, experiências, informações e conhecimentos, possibilitando assim o avanço no Nível de Desenvolvimento Real.

Neste sentido, Vygotsky (1984, p.98 *apud* REGO, 2007, p.74) argumenta que o que é caracterizado como zona de desenvolvimento proximal hoje, será o nível de desenvolvimento real amanhã, pois: “[...] aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã”.

Hedegaard aponta que, o verdadeiro objetivo da escola é:

ensinar conceitos científicos às crianças de uma forma teórica pela aplicação de um procedimento epistemológico teórico. Os conceitos cotidianos das crianças são, desse modo, ampliados para incluir conceitos científicos teóricos. Se os conceitos científicos são aprendidos como conceitos empíricos, as crianças terão dificuldades para relacionar o que elas aprendem na escola com o ambiente circundante. Apenas aprendendo conceitos teoricamente é que essa aprendizagem pode acontecer. (2002, p. 348).

O ensino deve pois criar zonas de desenvolvimento proximal, envolvendo os alunos em atividades que permitam desafiar seu pensamento.

Para Moysés (2009), a obra de Vygotsky caracteriza o papel da escola no desenvolvimento do sujeito. Vygotsky observa que a criança é um ser ativo, atento e está em constante desenvolvimento criando hipóteses, conjecturas sobre o meio. Ele ainda pontua que a criança nasce em um ambiente social que vai sendo transformado com o passar dos tempos,

assim como ela também vai desenvolvendo, por meio das interações com os adultos e com as outras crianças mais e menos experientes.

Vygotsky propõe que se deve conceber: “[...] à tese marxiana de que a vida em sociedade é que determina a consciência e a conduta do homem, e não o seu inverso” (BERNARDES, 2010, p. 300). Durante estas aquisições/apropriações culturais, o ser humano vai atribuindo significados por meio da atividade pelas quais o aluno se envolve num papel ativo na formação do pensamento científico, via conteúdos escolares. Neste sentido, o próximo tópico aborda a Teoria da Atividade como condição para constituição humana e construção do saber escolar.

## 2.7 Teoria da Atividade

A Teoria da Atividade desenvolvida por Leontiev, Rubinstein e Luria é geralmente considerada uma continuidade da Teoria Histórico-Cultural, por ser fundamentada nos pressupostos desta.

Foram feitos estudos por Leontiev sobre a atividade humana, culminando na formação da Teoria da atividade, um dos marcos das ideias da Teoria Histórico-Cultural. Dedicaram, em especial, ao estudo da atividade mental e de sua relação com o próprio desenvolvimento do sujeito.

A Teoria da Atividade é considerada como um dos campos de pesquisa de suma importância, pois considera o outro como participante ativo no desenvolvimento do sujeito, pautada nos princípios do materialismo dialético de Marx. Para este, o ser humano é resultado de um “[...] entrelaçamento do aspecto individual, no sentido biológico, social e no sentido cultural” (MORETTI; ASBAHR; RIGON, 2011, p. 478).

Dentre as características contidas nela, destacamos, como afirma Moysés (2009, p. 49): “[...] a relação entre atividade e consciência, extremamente esclarecedor de certos problemas que ocorrem no processo de aprendizagem”.

Caracterizando ainda a Teoria da atividade, podemos identificar que atividade e consciência devem andar juntas, pois como argumenta Moysés (2009), a aprendizagem não pode girar somente em torno de atividades mecânicas como só acontece em nossas escolas. De maneira geral, não podemos fazer ou pensar na atividade só por fazer, daí o fato de ser essencial a presença de motivos nas atividades.

A partir da internalização, o indivíduo então progride e desenvolve criando conceitos de atividades superiores.

No cerne da teoria da atividade está concepção marxista da natureza histórico-social do ser humano explicada nas seguintes premissas: 1) a atividade representa a ação humana que mediatiza a relação entre o homem, sujeito da atividade, e os objetos da realidade, dando a configuração da natureza humana; 2) o desenvolvimento da atividade psíquica, isto é, dos processos psicológicos superiores, tem sua origem nas relações sociais do indivíduo em seu contexto social e cultural. (LIBÂNEO; FREITAS, s/ano, p. 4).

O conhecimento teórico deriva das relações entre o interno e externo. Davydov (1999, p. 4, grifos do autor) informa que: “Tal conhecimento só pode ser apropriado se reproduzir o próprio processo de sua *gênese*, recepção, e organização, isto é, quando se transforma o material”. Isto é, para que o conhecimento desenvolva, seja compreendido, este deve ser organizado de uma forma a refletir sobre o seu processo de desenvolvimento, à luz dos seus contribuintes e da época histórica.

Leontiev (1987, *apud* MORETTI; ASBAHR; RIGON 2011, p. 480) define atividade como: “[...] composta por duas características centrais, a de orientação e a de execução. Em termos de orientação a atividade compreende as necessidades, os motivos e as tarefas”. Para Leontiev, toda atividade deve ser mediada com base em motivos, isto é, a atividade deve instigar o aluno a dar significados aos conceitos a serem apreendidos e ao professor dar significações àquilo que ensina. A atividade é dirigida por um motivo e este mobiliza o sujeito a executar ações que possibilitam a satisfação da sua necessidade.

A atividade só existe por meio de ações ou grupo de ações, as quais podem fazer parte de distintas atividades e uma mesma atividade pode gerar distintas ações.

Os elementos estruturantes da atividade são: necessidade, motivo, ação e operação. O motivo é regido por uma necessidade, que mobiliza as ações, as quais estão subordinadas a objetivos e dependem das condições para a sua realização por meio das operações, que nada mais são que os modos de realização da ação. (MORAES; MOURA, 2009, p. 108).

Cabe ao professor, organizar o ensino de forma que os conhecimentos elaborados historicamente pela humanidade possam ser apropriados por seus alunos. Além deste conhecimento específico, a criança deve estar em um espaço propício à assimilação de outras características como: reflexão, criticidade, criatividade, cooperação dentre outras. Daí, Davydov (1999) aponta que o processo educativo que gera desenvolvimento psicológico é aquele que coloca o sujeito em atividade.



A seguir refletiremos sobre outra corrente psicológica criada tendo como base os pressupostos basilares da Teoria Histórico-Cultural, o Ensino Desenvolvimental, percebendo algumas semelhanças e diferenças quanto a Teoria da Atividade de Leontiev.



### **3 A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO**

Os estudos e pesquisas ligados à Teoria de Vygotsky, permaneceram apenas em alguns Institutos Soviéticos. Pesquisadores como V.V. Davydov, Galperin, Elkonin dentre outros, discípulos de Vygotsky, deram continuidade aos trabalhos, contudo trilharam caminhos próprios, elaborando novas teorias. Nesta questão, o que almejamos ao longo deste tópico é refletir sobre o que esses pesquisadores entendem por educação. A educação e o ensino são formas universais e necessárias para o desenvolvimento mental, cujos processos estão vinculados aos fatores socioculturais e à atividade interna de aprendizagem das pessoas. Neste sentido, este capítulo interpela contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvidor de Davydov para a Educação Matemática.

#### **3.1 Percorrendo caminhos de desenvolvimento**

Vygotsky, como sabemos, além de ser o patrono da Teoria Histórico-Cultural, contribuiu bastante para várias outras pesquisas que, em geral, continuaram com o desenvolvimento da psicologia social e educacional, após sua morte.

O ensino pautado nas premissas do Ensino Desenvolvidor, proposto por Davydov, pensador e educador russo, psicólogo e filósofo, precisa contemplar certas características que serão discutidas ao longo deste trabalho.

Vasili Vasilievich Davydov (1930-1998) era Membro da Academia de Ciências Pedagógicas, doutor em psicologia, professor universitário e pertenceu à terceira geração de psicólogos russos e soviéticos, desde os trabalhos do grupo inicial de Vygotsky realizados nas décadas de 1920 e 30 do século passado. Embora Davydov tenha falecido em 1998, seu sistema continua em desenvolvimento pelo grupo de colaboradores e continuadores, não sendo uma obra pronta.

Davydov cursou Filosofia e Psicologia na Faculdade de Filosofia da Universidade Estadual de Moscou, formando-se em 1953. Durante os anos de 1959 e 1983, trabalhou juntamente com Elkonin, como chefe do laboratório de psicologia no Instituto de Psicologia Geral e Pedagógica da Academia de Ciências Pedagógicas da União Soviética e, além disso, foi colaborador científico de Luria e Leontiev por muitos anos.

Sendo chefe do laboratório de psicologia, formou ainda nessa época sua própria equipe de pesquisadores, contando com nomes como A. K. Markova e A. I. Aidarova. Foi demitido e readmitido no ano de 1986, tornando-se diretor do referido instituto. Na sequência, outros pesquisadores se juntaram a eles com o propósito de organizar experimentos de ensino com crianças de 4-6 e 10-12 anos, com o intuito de desenvolver o pensamento teórico. Destacam-se os estudos de Lompscher na Alemanha, Engeström na Finlândia e Hedegaard e Chaiklin na Dinamarca.

As pesquisas intensas com Elkonin, principalmente as realizadas na Escola Experimental N. 91 de Moscou, foram dando bases e subsídios consistentes para a surgimento da Teoria do Ensino Desenvolvidor. As investigações e pesquisas escolares identificaram a ausência da atividade de estudo nas escolas. Além disso segundo o teórico, o ensino tradicional é insuficiente, pois fora organizado de forma a satisfazer os interesses do sistema capitalista.

Neste sentido, em 1960, ambos propuseram a reorganização de programas de ensino, criando assim o sistema Elkonin-Davydov. Por volta de 1970, Elkonin e Davydov formalizaram a Teoria do Ensino Desenvolvidor, conhecida e denominada na época por muitos de nova etapa da Teoria da atividade<sup>4</sup>. A essência do ensino desenvolvimental é a Teoria da atividade de estudo e seu objeto, devendo ser trabalhado desde as séries iniciais para que a criança adquira uma atitude de estudo.

Durante muito tempo, na Rússia e até os dias atuais, muito se popularizou a denominação do sistema didático intitulado de Elkonin-Davydov<sup>5</sup> que hoje damos o nome de Ensino Desenvolvidor, resultado do longo trabalho de ambos, por volta de 1970. Esta destaca como um desdobramento da Teoria Histórico-Cultural.

É de suma importância compreender os conceitos da THC, visto que, muitas das teses e dos caminhos que Davydov se baseou para a formulação da Teoria do Ensino Desenvolvidor<sup>6</sup> por volta de 1970 estão contidas na mesma.

A Teoria do Ensino Desenvolvidor tem suas raízes do conhecimento ligadas nos pressupostos do materialismo-dialético, no qual evidenciamos uma relação entre o sujeito humano (individual) e social e a realidade externa que o cerca.

---

<sup>4</sup> Sendo assim, ao longo deste trabalho, optamos por usar o termo tarefa, afim de não ocorrerem interpretações errôneas, evitando possíveis confusões. Com excessão é claro, das citações.

<sup>5</sup> “Tornou-se amigo de Elkonin e do filósofo EvaldVasilievitchIlienkov (1924-1970)” (LONGAREZI E PUENTES, 39p. 2013).

<sup>6</sup>Longarezi e Puentes (2013) acrescentam que a Teoria do Ensino Desenvolvidor, pode ser denominada de: “Ensino para o Desenvolvimento” e de “Sistema Elkonin-Davydov.”

Vale ressaltar que no decorrer do texto será utilizada a grafia Davydov. Porém, ao se tratar de referência, será mantida a escrita conforme apresentada na obra, quais sejam: Davídov, Davidov, Davydov e Давыдов.

Davydov não só aprimorou a Teoria pedagógica dentro da Teoria Histórico-Cultural, como também aprimorou relações práticas entre educação e desenvolvimento formuladas por Vygotsky.

O sistema Elkonin-Davydov é referência no cenário mundial, além da Rússia, sendo estudado em países como Estados Unidos, Japão, Ucrânia, França, Alemanha, dentre outros (ROSA, DAMÁSIO, 2012).

De maneira geral, a Teoria do Ensino Desenvolvimental tem como bojo central a educação, o ensino e a aprendizagem, permeada por valores culturais, objetivando à compreensão do desenvolvimento humano, a organização do ensino e a formação do pensamento teórico.

### 3.2 Pensamento Teórico e Organização do ensino-aprendizado

Como já abordamos ao longo deste, o pensamento teórico é algo que irá desenvolver-se nos alunos, com o auxílio do professor.

Neste sentido, a Teoria do Ensino Desenvolvimental apoia-se na ideia de que o bom ensino impulsiona o desenvolvimento do sujeito, facilitando o desenvolvimento do pensamento teórico, isto é,

[...] os alunos devem aprender o aspecto genético e essencial dos objetos, ligado ao modo próprio de operar da ciência, como um método geral para análise e solução de problemas envolvendo tais objetos. Depois, utilizando o método geral, os alunos resolvem tarefas concretas, compreendendo a articulação entre o todo e as partes e vice-versa. A este procedimento mental Davydov denominou de pensamento teórico. (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 320).

Segundo o autor, a base do Pensamento Teórico é analisar a abstração, a generalização e o conceito. O Pensamento Empírico classifica, enquanto o Pensamento Teórico reproduz a essência<sup>7</sup>. A aprendizagem escolar, assim, é muito mais do que a simples aquisição de conceitos, mas sim o desenvolvimento mental.

---

<sup>7</sup>Os conhecimentos empíricos são expressos por palavras, isto é, o homem apropria-se de experiências próprias e alheias de forma superficial, subjetiva, tendo um caráter acrítico. Os conhecimentos teóricos se expressam nos planos das ações mentais, isto é, pela investigação, busca e construção pautada na criticidade.

Ao tratar de ensino-aprendizagem, Davydov (1988, p. 83) toma como ponto principal a apropriação de conceitos teóricos pelos estudantes, pois segundo ele, para compreendermos realmente um conceito devemos, pois, compreender sua essência: “[...] levar em conta que a essência da coisa pode ser revelada só no exame do processo do desenvolvimento de tal coisa” (tradução nossa).

É preciso buscar a essência do objeto (conteúdo), por meio dos fenômenos, observações e mediações. O pensamento teórico é o tipo de pensamento presente nos conceitos científicos que também resulta de caminhos de pensamento e análises. Ao aprenderem um conteúdo novo, os alunos precisam, não apenas apropriar dele como resultado de investigações, mas como um processo de pensamento que os levaram à criação do conteúdo.

Davydov (1988) acrescenta que “[...] a ação mental de sua construção e transformação constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência” (tradução nossa). A apropriação da essência do conteúdo ou conceito, permite a elaboração de generalizações e comparações quanto à essência e a aparência, características internas e externas, evidenciando assim o movimento dialético. Peres e Freitas (2014), corroboram neste sentido quando apontam que “O movimento de pensamento para apreender os objetos nada mais é que o movimento do abstrato ao concreto, presente no marxismo como método do conhecimento da realidade” (p. 21). Os alunos então adquirem conceitos abstratos para explorarem o conhecimento concreto.

Esse movimento do abstrato para o concreto é evidenciado na formação do pensamento teórico que é produto da atividade intelectual, resultante das seguintes etapas:

Ao iniciar a assimilação de qualquer disciplina científica, os alunos, com a ajuda do mestre, analisam o conteúdo do material didático, separam nele alguma relação geral inicial, descobrindo simultaneamente o que se manifesta em muitas outras relações particulares existentes no material dado. Registrando, por meio de signos, a relação geral inicial separada, os escolares constroem, com ela, a abstração substantiva do objeto estudado. Continuando a análise do material, descobrem a vinculação regular dessa relação inicial com suas diferentes manifestações e assim obtém a generalização substantiva do objeto estudado. Logo as crianças utilizam a abstração e a generalização substantivas para dedução sucessiva (também com a ajuda do mestre) de outras abstrações mais particulares e para uni-las no objeto integral (concreto) estudado. Quando os escolares começam a utilizar a abstração e a generalização iniciais como meios para deduzir e unir outras abstrações, elas convertem as estruturas mentais iniciais em conceito que registra certa “célula” do objeto estudado. Este “célula” serve, posteriormente, às crianças como um princípio geral pelo qual elas podem se orientar em toda a diversidade do material fatural, que deve assimilar em forma conceitual por via da ascensão do abstrato ao concreto. (DAVÍDOV, 1988, p.175, tradução nossa).

Segundo Veggeti (2004) para a formação destes conceitos, é necessário o movimento do abstrato ao concreto, do geral ao particular, procurando de início a gênese do conceito para

em seguida se consolidar o núcleo, percebendo assim as particularidades. A ascensão do abstrato ao concreto caracteriza como sendo um movimento para o qual todo começo é abstrato e cuja dialética consiste na superação da abstração, a qual definiremos adiante.

A Teoria do Ensino Desenvolvimental objetiva proporcionar as ações mentais para lidar com o objeto de conhecimento mediante um tipo de pensamento (pensamento teórico) que parte do abstrato (geral) para o concreto (particular), atribuindo potencialidade para o reconhecimento do objeto em situações diversificadas.

A abstração neste caso, caracteriza-se pela própria mediação, por levar o pensamento abstrato para uma compreensão concreta. Transformação esta que muitos estudiosos classificam como “reconstrução do todo concreto pelo pensamento” ou “ascensão do abstrato ao concreto”. O concreto não pode ser pensado como algo visível, manipulável, mas sim como um objeto ou fenômeno reconstruído pelo pensamento teórico, isto é representa a parte mais significativa, aprofundada e completa.

A ideia que temos neste método de ascensão do abstrato ao concreto ou método dialético é partir do concreto empírico para chegarmos ao concreto pensado por meio da análise do objeto.

A apropriação dos conhecimentos científicos para a formação do pensamento teórico, exige do aluno que este atravesse as superficialidades afim de caracterizar a essência. Sendo necessário uma intensa atividade intelectual por parte do aluno e por parte do professor, que precisa organizar o ensino de forma a possibilitar que estas ações aconteçam.

Na base do pensamento teórico, constata-se os procedimentos de análise, abstração e generalização,

Os conhecimentos empíricos se elaboram no processo de comparação dos objetos e representações sobre eles, que permite separar as propriedades iguais, comuns. Os conhecimentos teóricos surgem no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral. Os conhecimentos empíricos, apoiando-se nas observações, refletem nas representações das propriedades externas dos objetos. Os teóricos, que surgem na base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas, saindo assim, dos limites das representações. (DAVYDOV, 1988, p. 87 tradução nossa).

Suas pesquisas apontam a necessidade de investigar a essência do objeto, que a origem e o desenvolvimento dos objetos de conhecimento são caminhos de construção do conceito. Por meio da formação de conceitos e ampliação da aplicabilidade dos mesmos, o pensamento teórico desenvolve.

Para apropriarmos definitivamente de um conceito, é necessário que o aluno aproprie do processo histórico e da gênese conceitual do mesmo. Libâneo reflete que,

Por meio das ações mentais que se formam no estudo dos conteúdos, a partir do conceito teórico geral desse conteúdo, os indivíduos vão desenvolvendo competências e habilidades de aprender por si mesmos, ou seja, a pensar. (2009, p. 19).

Numa perspectiva davydoviana, na aprendizagem de um conteúdo científico, importa mais o domínio do processo de origem e desenvolvimento de um objeto de conhecimento do que o domínio apenas do seu conteúdo formal, pois na medida em que apropria do processo histórico, ele consegue internalizar propriedades a elaborar generalizações no intuito de resolver problemas e se necessário situações cotidianas.

Sobre a organização do ensino, ressaltamos que: “A organização do ensino consiste então na organização da tarefa do aluno, visando proporcionar-lhe um caminho para obter as conclusões científicas sobre os objetos e seus conceitos”. (PERES; FREITAS, 2014, p. 20).

Segundo Davydov (1988, p. 93), “[...] a base do ensino desenvolvimental é o seu conteúdo e dele se originam os métodos de organização do ensino” (tradução nossa). Para isso, é indispensável que o professor tenha um acentuado conhecimento do conteúdo, pois disso depende sua capacidade para a criação da tarefa. Torna necessário ainda a correlação entre a análise de conteúdo e os motivos dos alunos no processo ensino-aprendizagem.

A organização do ensino deve ser caracterizada por possibilitar que os alunos percebam a origem do conteúdo que estão aprendendo, do geral para o particular, formando assim generalizações. Em seguida, os alunos constroem o núcleo do objeto, relacionando-o com as partes, construindo de forma investigativa o determinado conceito. Freitas (2011) acrescenta que, ao realizar estes procedimentos, os alunos percorrem etapas, num movimento do social para o individual, do geral para o particular, do abstrato para o concreto e vice-versa.

Para Libâneo e Freitas (2007), Davydov cita três contribuições do ensino desenvolvimental, a de que deve ocorrer uma integração entre os conteúdos científicos em conjunto com o desenvolvimento do pensamento. Outra questão da contribuição a ser abordada é a que o professor deve organizar o ensino de forma a associar o assunto a ser apreendido e os motivos dos alunos para o aprendizado, isto é, as operações e ações vinculadas à tarefa devem possuir finalidades relacionadas com a vida do indivíduo. E por último, é o fato de que os professores devem ter domínio dos conteúdos específicos, mas também domínio de estratégias pedagógicas que instiguem seus alunos ao aprender-aprender.



De maneira geral, as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvidor para a educação são de suma importância, pois compreendem que a essência da educação se concentra no conteúdo, e é a partir deste que originam os métodos de organização do ensino.

### 3.3 Implicações da Teoria do Ensino Desenvolvidor na Tarefa de Estudo

A Teoria Histórico-Cultural parte do conceito de atividade, criado por Marx, para explicar que é por meio da tarefa que os homens modificam a natureza e se modificam, em função de satisfazer as necessidades criadas pela sua existência.

Leontiev, então, cita os elementos estruturais de uma atividade: necessidade, motivo, ação e operação. Davydov (1988) corrobora com estes, acrescentando o desejo sobre o qual as emoções funcionam e desencadeiam a atividade de aprendizagem.

A Teoria da Atividade traz contribuições significativas para planejarmos o ensino na perspectiva Desenvolvidor, de modo que os conceitos – conteúdo e forma - sejam ensinados de maneira tal que os alunos apropriem-se dos conhecimentos teóricos e, conseqüentemente, desenvolvam o pensamento cognitivo e a consciência<sup>8</sup>. A atividade é responsável por todo o desenvolvimento teórico do sujeito e quando tratamos do contexto educacional, esta é importante para o desenvolvimento do aluno.

Davydov complementa ainda a Teoria da Atividade com outro elemento, desenvolvendo ainda as ideias já existentes.

[...] a atividade do homem tem uma estrutura complexa; seus componentes são o desejo, as necessidades, os motivos, as finalidades, as tarefas, as ações, as operações que se encontram em permanentes inter-relações e transformações. (1988, p.41 tradução nossa).

O desejo destaca por motivar a tarefa, estando o desejo ligado diretamente às emoções. As ações se relacionam-se muito mais com os desejos do que as necessidades, embora estas baseadas em motivos.

Todo o esforço do professor e os investimentos políticos, econômicos, pedagógicos e sociais, pouco adiantarão se os alunos não desejarem, não esforçarem para apropriação do conhecimento. Todavia, isso não significa afirmar que a educação atual seja reflexo somente desta falta de desejo de saber, pois sabemos que há uma série de outros fatores que poderiam ser citados, mas que não são objetos de estudo deste trabalho.

---

<sup>8</sup>É da relação social x individual que se forma a consciência humana (VYGOTSKY, 2013).

Se o desejo não surge do nada, pode o professor apoiar-se em conceitos e conhecimentos já estabelecidos e apropriados pelos alunos e a partir disso propor novas situações problemas.

Quando identificada a carência por esse desejo de saber, precisa o professor propor ações que possam mediar, que instiguem o aluno à busca pelo saber, ressaltando neste aspecto a importância das relações sociais. Esse desejo não é algo natural do aluno, daí termos que nos desdobrar para criar, buscar alternativas que levem os alunos ao desejo e à busca pelo saber.

A organização didática da aprendizagem tem que partir da experiência dos alunos, dos seus interesses, das perguntas, e das necessidades, etc; deve estimular e utilizar conflitos cognitivos; estimular a reflexão sobre demandas objetivas e pré-requisitos subjetivos como uma base para a formação de objetivos de aprendizagem tem que tornar os alunos cientes dos sucessos e das falhas, etc, e tem que manter a autoconfiança e a auto-competência dos alunos. (LOMPSCHER, 1999, p. 3-4)

A tarefa de aprendizagem tem papel ativo na formação da consciência humana, que somente se desenvolve mediante uma educação escolar que impulse, leve, instigue o desenvolvimento cognitivo.

Davydov esboça que os conteúdos e métodos ensinados na escola têm ajudado os alunos a desenvolver somente o pensamento empírico, “[...] o pensamento que se realiza com ajuda das abstrações e generalizações de caráter lógico-formal somente leva a formar os chamados conceitos empíricos”. (DAVYDOV, 1988, p. 104, tradução nossa).

A Teoria do Ensino Desenvolvimental tem foco na tarefa de estudo e procura valorizar o potencial criativo como núcleo da personalidade. De maneira geral, para Davydov, o bom ensino é aquele que promove e amplia o desenvolvimento mental e atua na personalidade dos alunos. Sendo assim, para o autor, a função de uma proposta pedagógica é melhorar o conteúdo e os métodos de ensino, afim de conhecer melhor a essência dos objetos de conhecimento.

O principal interesse está em organizar o ensino da disciplina, de forma que isso resulte em desenvolvimento do aluno por meio da internalização do conhecimento produzido historicamente, compreendendo o processo e a dimensão da estruturação do conhecimento.

Nessa linha de pensamento, o conhecimento é produzido a partir de um movimento que vai da aparência à essência. Davydov propõe, como princípio didático, que os alunos sejam ensinados a partir do método dedutivo para identificar a ‘célula’<sup>9</sup> conteúdo e, a partir disso, deduzir as diversas propriedades particulares do mesmo. Essa identificação ajuda os alunos a

---

<sup>9</sup>Davídov, Chaiklin, Hedegaard, entre outros, utilizam diferentes termos - célula, núcleo, germe - para se referirem à essência do conceito que está presente tanto no abstrato quanto no concreto pensado.

reproduzirem mentalmente o objeto, que dará origem ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

Esse movimento do abstrato para o concreto, além de produzir a construção do conhecimento, favorece o desenvolvimento da consciência, do pensamento teórico e das ações cognitivas relacionadas, como a reflexão, a análise e o planejamento (MARZARI, 2010). É neste contexto que o desejo origina, por meio das tarefas, situações-problemas.

O Ensino Desenvolvimental objetiva a construção do pensamento teórico, pois o ensino no entendimento de Chaiklin tem a função de (1999, p. 4) “[...] que reproduza conscientemente as compreensões teóricas desenvolvidas em uma matéria de modo a explicar as importantes relações estruturais que caracterizam aquela matéria”. Se o objetivo da escola é desenvolver o pensamento teórico, o conteúdo precisa ser necessariamente constituído pelo conhecimento teórico, originado de inter-relações entre interno e o externo, essência e aparência.

O objetivo principal do Ensino Desenvolvimental é a formação do pensamento teórico-científico do aluno. Para cumpri-lo, o professor precisa estruturar e organizar a tarefa de estudo do aluno de modo que este realize as abstrações e generalizações, sendo capaz de utilizá-las em outros aspectos. Para fazer isso, “[...] o professor deve investigar seu aspecto ou relação nuclear, na qual aparecem as relações fundamentais de sua gênese e transformação histórica, expressando o seu princípio geral” (LIBÂNEO, FREITAS, 2013, p. 332).

Nesta questão é interessante o entendimento de Marx, do geral para o particular, isto é, uma célula que define as características principais de um conceito, dando subsídios para desenvolvê-lo.

Neste sentido, o professor ao estruturar a tarefa:

[...] estrutura antes uma atividade em que, primeiramente, os alunos apreendam o conceito teórico deste objeto para depois utilizá-lo como uma base genérica na análise do objeto em distintas formas e contextos particulares. (LIBÂNEO, FREITAS, 2013, p. 335).

Para chegarmos à definição e/ou a compreensão de um conceito, partimos da abstração para a generalização, ou seja, do abstrato para o concreto, do geral para o particular. Isto permite ao aluno conhecer o objeto em cada caso. Nesse processo de consolidação, surgem dois aspectos: aspecto imediato e o mediatizado.

O aspecto imediato refere-se ao pensamento empírico, só se toma como ponto de conhecimento a aparência, superficialidade, percepção externa que diferencia e classifica os

objetos e fenômenos e os denomina com novos termos, “[...] não revelando assim suas conexões internas e essenciais (LIBÂNEO E FREITAS, 2013, p. 336)”. Para Davydov:

A existência do objeto no tempo e no espaço, na unidade da existência presente, significa a manifestação de sua imediatez ou caráter externo. O conhecimento empírico é o movimento na esfera desta exterioridade, a assimilação do aspecto da realidade descrito pela categoria da existência. (DAVÍDOV, 1988, p. 125, tradução nossa).

Já o aspecto mediatizado é o mais alto grau do conhecimento, quando se reflete desde suas origens até as relações internas e externas que constituem o dado conceito. O conceito neste caso (pensamento teórico) surge como um atividade mental ao reproduzi-lo. “O conhecimento teórico é, ao mesmo tempo, o reflexo mental do objeto material e a ação mental de reproduzi-lo mentalmente (LIBÂNEO E FREITAS, 2013, p. 337)”. Evidenciamos, portanto, vínculos, relações e contradições ao invés de se tentar buscar aparências, semelhanças.

Podemos inferir que a formação dos conceitos empíricos é fundamentada na prática didática de avançar no ensino do particular para o geral; todavia para a formação de conceitos teóricos, parte-se do geral ao particular e vice-versa.

O professor ao estruturar a tarefa precisa ter como objetivo inicial que os alunos identifiquem o núcleo do objeto/conceito nuclear (célula), identificando o aspecto geral e por seguinte, que sejam capazes de deduzir as relações particulares do objeto de estudo. Chaiklin (1999) mostra que o estudo aprofundado do conteúdo a ser ensinado é a base para o planejamento do ensino, encontrando o seu núcleo. Esta exigência impõe para a presente pesquisa a necessidade de proceder à investigação do núcleo da Teoria dos Números Complexos que será visto adiante.

A emoção é caracterizada como uma “mola propulsora” da aprendizagem. O professor não pode apenas verbalizar o conceito científico, é preciso que leve os alunos ao caminho de investigação do conceito (FREITAS, 2012). Este é um dos maiores desafios da educação, motivar os alunos e leva-los a construção e ao desenvolvimento do pensamento científico.

Em suma, objetivamos que o professor, ao proceder na organização do ensino, favoreça o trabalho dos alunos para que inicialmente procedam à identificação da célula originária, para depois operar e manuseá-la de forma a compreender suas múltiplas propriedades particulares.

A Teoria de Davydov, assim, não preocupa com a quantidade de conteúdo, mas sim com o desenvolvimento das capacidades mentais dos alunos que podem levá-los ao

conhecimento teórico, por meio das análises, generalizações e investigações de aspectos históricos, afim de interiorizar todo o seu desenvolvimento.



## 4 O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Com a evolução da tecnologia, novas possibilidades de ensino estão surgindo, em especial para o ensino da Matemática, em que uma grande variedade de programas computacionais, *softwares* e aplicativos estão contribuindo com o professor bem preparado, que manipula estes aplicativos com a finalidade de tentar modificar o ensino, evidenciando a construção do conhecimento. Neste capítulo discutimos o uso de novas tecnologias de informação na análise do *software* GeoGebra, enfatizando seu uso no ambiente escolar e sua influência no processo ensino-aprendizagem.

### 4.1 Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS): implicações no contexto educacional

No decorrer da história da humanidade, a ciência e a tecnologia têm sido determinantes para o modo de vida da população. Desta forma, o desenvolvimento científico e tecnológico influenciam os formatos de vida.

A ciência está presente em todas as temáticas, tecnologia e sociedade, e espaços formais e não formais. Entendemos que a educação não pode ser limitada aos muros da escola, pois é um processo constante e cotidiano de cada indivíduo. Na escola coexistem muitos e variados mecanismos educacionais que influenciam e contribuem para formação do sujeito enquanto cidadão.

No contexto histórico, o papel da ciência por vezes esteve ligado a processos de dominação do mundo. Jarrosson (1996, p. 24) esclarece que nesse processo de dominação, a ciência precisa, por muitas vezes, corrigir certos danos e consequências que ela mesma causa,

Quando [...] o homem é obrigado a utilizar a sua própria tecnologia para eliminar esses resíduos. Mais um limite que faz duvidar da capacidade da ciência em solucionar os problemas, em particular os que ela mesma provoca.

Reforçamos ao longo deste tópico que o intuito não é menosprezar ou desmerecer a ciência, mas sim em refletirmos que a evolução da humanidade, desde seus primórdios, está intimamente ligada à capacidade do Homem em criar alternativas para garantir sua sobrevivência e melhorar seu conforto de vida. Contudo, o desenvolvimento da ciência e da tecnologia tem acarretado diversas transformações na sociedade, tanto em aspectos políticos, sociais, culturais, ambientes, quanto em níveis econômicos.

Contudo, não podemos ter a visão ingênua e confiarmos completamente na ciência e na tecnologia, isto é, aprovarmos todo e qualquer desenvolvimento científico-tecnológico – como a produção de alimentos transgênicos, construção de usinas nucleares, o tratamento ainda precário do lixo, dentre outros fatores que podem acarretar prejuízos a curto ou longo prazo.

Em muitos casos os prejuízos podem nem somente ser materiais, mas pode haver interesses políticos das classes dominantes, visando somente o lucro e muitas vezes pelo poder de persuasão acabam convencendo as classes menos favorecidas.

Torna-se cada vez mais necessário que a sociedade, além de ter acesso aos aparatos científicos e tecnológicos, saiba também avaliar e participar da tomada de decisões sobre determinado assunto e suas implicações no ambiente em que vive.

Precisamos de uma sociedade que encare Ciência e Tecnologia como produtos de fatores culturais, sociais, políticos e econômicos. As pessoas precisam ter acesso à Ciência e a Tecnologia, não somente no sentido de compreenderem, mas também no poder de voto, de decisão do uso ou não desses produtos. Neste sentido, destacamos o papel da educação no trabalho com temas que evidenciam a CTS. Para tanto, é necessário que ocorra uma reavaliação dos componentes curriculares de forma a colocar a ciência e a tecnologia como produtos culturais (frutos da criação humana) e vinculando-as ao contexto social. A escola é uma espaço por excelência para que discussões e possíveis mudanças comecem a ocorrer.

A sociedade precisa perceber que Ciência e Tecnologia estão a serviço da sociedade, sendo assim, deve participar da tomada de decisões em relação às consequências decorrentes do impacto da ciência e da tecnologia na sociedade contemporânea. Num país que tem uma política democrática, o povo precisa ter vez e voz!

A importância de discutirmos os avanços da ciência e da tecnologia, suas causas, consequências, interesses econômicos, políticos e sociais na escola, afim de que nossos alunos vejam a ciência como fruto da criação humana. E é neste entendimento da ciência como fruto da criação humana, que estamos trabalhando com o viés da ciência Matemática, como produto da criação humana.

Nesse processo, o ensino-aprendizagem passa a ser visto como possibilidade de despertar no aluno a curiosidade, o espírito investigador, questionador e transformador da realidade. Surge daí a necessidade de buscar elementos para a resolução de problemas que fazem parte do cotidiano.

Professor e aluno passam a pesquisar juntos, debruçam juntos sobre uma situação-problema dada afim de resolvê-la, ampliando assim o conhecimento científico. Em níveis da didática, isso significa quebrar com as práticas escolares tradicionais que focam num ensino



puramente transmissor, para um ensino contextualizado e que dê significados à produção do saber.

Colocar definições no início de um texto matemático é o mesmo que mostrar as fotos 3x4 e os nomes dos personagens de uma história que nunca foi contada e acreditar que, desta forma, conseguiu-se apresentá-los de modo significativo. A essência da Matemática é alcançável mais por meio do conhecimento das práticas que legitimam as definições, do que por meio das próprias definições ou dos teoremas. (MATHIAS, 2015, p. 23).

Peres aponta também que,

Desta forma, o ensino deve ser organizado, não visando apenas o repassar de um conteúdo, mas o entendimento de suas particularidades, chegando aos seus conceitos principais, levando os alunos ao desenvolvimento de ferramentas mentais que são capazes de realizar outras generalizações, formando o pensamento teórico (2010, p. 49).

Como vimos, o pensamento teórico é formado pela ampliação dos conhecimentos e bagagens sócio-históricas que cada aluno leva para a sala de aula. E a função da escola é confrontar estes conhecimentos ditos empíricos, afim de desenvolvê-los, reconhecendo desta forma o desenvolvimento da ciência de acordo com as necessidades humanas.

Daí a ideia de que a ciência nunca está acabada, pois constantemente se reinventa/reorganiza no intuito de melhorar a qualidade de vida das pessoas. Jarrosson (1996, p. 32) corrobora que:

O tempo é o tempo, o que quer dizer que renunciamos a retirar-lhe a sua capacidade de nos espantar. O tempo é aquilo que espanta. O futuro contém algum imprevisto. Isso significa que as soluções que podemos aplicar hoje em dia, em função de uma situação, não são em caso algum soluções completas.

Construindo uma metáfora tendo como base este pensamento de Jarrosson e os conhecimentos científicos, podemos afirmar que em muitas áreas, o conhecimento é algo mutável, e que a verdade, com o passar dos tempos pode não mais ser, pois na medida que a sociedade desenvolve, diversas outras questões vão surgindo e/ou ganhando força. De maneira geral, o desenvolvimento científico está no cotidiano e merece, cada vez mais, um atento olhar das demais ciências (humanas, sociais, políticas etc.) no sentido de compreender que a mesma está a serviço da sociedade.

A tecnologia, bem como a ciência, são relações transitórias na sua base, pois tudo o que está sendo ofertado na atualidade como inovador e extremamente novo, tem seus dias contados e carecerá de troca. Cabe à sociedade então, utilizar os conhecimentos sobre as

relações existentes entre ciência, tecnologia e sociedade para compreender melhor os problemas do mundo em que vivem; apreciar e valorar criticamente as potencialidades e as limitações da ciência e da tecnologia para proporcionar maior grau de consciência e de bem-estar individual e coletivo no processo da educação científica.

É verdade que, as pesquisas em Educação Matemática ganham cada vez mais espaço, contudo o ensino desta disciplina ainda necessita de metodologias que deem melhores resultados, deixando de lado o modelo transmissivo e expositivo de conteúdo. Método este que pouco contribui para o ensino atual, daí a necessidade de uma análise na organização do ensino quanto à dimensão política e emancipatória da Matemática para um ensino que possa de fato ser aplicado e possa contribuir na sociedade.

Jarrosson (1996, p. 43) estudioso e pesquisador sobre os estudos sociais da ciência e da tecnologia também denominadas estudos de ciência, tecnologia e sociedade que trata de valores sociais, políticos e culturais acerca das inovações tecnológicas e das pesquisas científicas, e como estas, afetam a sociedade. Segundo o mesmo, devemos desmistificar um pensamento errôneo quanto às implicações das tecnologias na sociedade, no qual o mesmo diz que “A tecnologia não transforma automaticamente a sociedade. Muda as sociedades que estão prontas para a mudança, que têm uma representação positiva de mudança de estrutura”. Isto é, a tecnologia transforma ambientes que estão preparados para lidarem com estas mudanças.

Na educação a tecnologia só contribuirá, caso os profissionais da educação estejam preparados, isto é bem formada a consciência do desenvolvimento científico-tecnológico quanto ao uso destes no contexto escolar.

Habermas (1973, *apud* FOUREZ, p. 208) caracteriza as interações entre ciência e sociedade em 3 grandes véis: *tecnocráticas* – as decisões cabem somente aos especialistas; *decisionistas* – uns determinam os fins e outros os meios/processos para se chegarem a tais objetivos; os *técnicos* – diálogo, negociação entre as partes envolvidas. Desta forma, é necessário uma divulgação maior do conhecimento científico para que a grande parcela da população, que não tenha acesso, possa compreender situações que acontecem no seu meio e ainda por cima participar de questões relativas a tais assuntos. Jarrosson (1996, p. 88), sobre os tecnocratas, reflete que, “aquele que domina a informação é rico (...), aquele que está fora dos circuitos de informação, ou que não a compreende, está condenado a sujeitar-se à lei dos outros”. Esse discurso remete muito ao que já refletimos anteriormente, sobre o poder de convencimento das classes dominantes sobre as classes mais ingênuas.

Os artefatos tecnológicos e científicos contidos em um país determinam o tipo de vida social daquele determinado grupo: uma sociedade pode tornar mais ou menos tecnocrática de

acordo com tipo de tecnologia que possui. Se um determinado país possui uma tecnologia de ponta, é necessário que este privilegie a formação de técnicos / especialistas, pois caso contrário o poder continuará nas mãos de poucos. É imprescindível que haja um sistema tecnológico e social bem preparado.

Não é necessário que os alunos tornem-se especialistas em cada área de conhecimento, mas sim que tenham informações básicas para tomarem consciência do que acontece ao seu redor e participarem na tomada de decisões, ou seja, oferecer subsídios para a participação de cidadãos conscientes nas tomadas de decisões. Nesta questão Santos e Mortimer (2002, *apud* VAZ, FAGUNDES, e PINHEIRO, 2009, p. 100) acrescentam que, “[...] alfabetizar, portanto, os cidadãos em ciência e tecnologia, é hoje uma necessidade contemporânea. (...) que permitam ao cidadão agir, tomar decisão e compreender o que está em jogo no discurso dos especialistas”.

Vaz, Fagundes e Pinheiro (2009, p. 108) contextualizam historicamente o surgimento da CTS na educação, da seguinte forma, “O movimento CTS surgiu por volta de 1970 e trouxe como um dos seus lemas a necessidade do cidadão e conhecer os direitos e obrigações de cada um, de pensar por si próprio e ter uma visão crítica da sociedade onde vivem”.

O desenvolvimento da tríade discutida aqui, tem suas origens na necessidade de formar cidadãos críticos e conscientes de suas ações nas interações ciência e tecnologia. Portanto, concebemos o processo educacional como algo social, visto que ao fazermos um paralelo com a ética – carregada de características mutáveis, sociais, temporais e históricas – percebemos que o tipo de educação varia de uma sociedade para outra.

A importância deste tópico para este trabalho é pelo fato de que para formarmos um aluno, é necessário que ofereçamos condições de compreender a natureza e o meio em que vive, num contexto científico-tecnológico, possibilitando aos alunos ampliar o conhecimento reflexivo da Matemática.

O conhecimento matemático, desta forma, pode ampliar a compreensão dos avanços científicos e tecnológicos, tanto na contribuição da Matemática para o desenvolvimento quanto ampliar o conhecimento dos educandos para a capacidade de leitura do mundo e participação social. Os autores acima citados corroboram que, os currículos com ênfase em CTS apresentam como objetivo geral a preparação dos alunos para o exercício da cidadania e caracterizam por uma abordagem de conteúdos científicos no seu contexto social.

A abordagem do ensino-aprendizado de Matemática que contempla a CTS, tem o objetivo de desenvolver uma postura crítica por parte dos envolvidos no processo quanto ao papel da Ciência e da Tecnologia na sociedade. Nesta perspectiva devemos oferecer aos

educandos um ensino que vai além da aplicação de regras, simbolismos, fórmulas desconectadas do contexto social, para um ensino que olhe a Matemática como uma ferramenta de leitura de mundo, compreensão e intervenção no mundo. Podendo assim, avaliar, questionar as influências advindas das transformações científicas e tecnológicas no âmbito social e ambiental.

Reconhecendo a importância da tecnologia nesta proposta de trabalho, refletimos, a seguir, sobre as perspectivas e possibilidades de utilização das tecnologias de informação e comunicação pelo Professor de Matemática.

#### 4.2 Tecnologias em Educação Matemática

As tecnologias, de certa forma, estão cada vez mais presentes em nosso cotidiano de diferentes formas, permeando sobre quase todas as áreas do conhecimento humano. A escola como uma instituição social, precisa acompanhar os avanços e as mudanças nas quais a sociedade vem passando.

Contudo, a escola tem acompanhado esta modernização, ou melhor, o processo de ensino-aprendizagem tem passado por esta modernização? E é neste sentido, que discutiremos ao longo deste, as implicações desta para o ensino. Kenski (2007, p. 45) aborda que, “A escolha de determinado tipo de tecnologia altera profundamente a natureza do processo educacional e a comunicação entre os participantes”.

Segundo a autora, o nosso dia a dia está rodeado de tecnologias, e este conhecimento permite ao ser humano ter uma vida melhor. Sendo assim, a mesma compreende tecnologia por,

[...] ela está em todo lugar, já faz parte das nossas vidas. As nossas atividades cotidianas mais comuns – como dormir, comer, trabalhar, nos deslocarmos para diferentes lugares, ler, conversar e nos divertimos – são possíveis graças às tecnologias a que temos acesso. (2007, p.24).

Para a autora, todo processo de construção que envolve planejamento, construção e manipulação de objetos, é denominado tecnologia. Segundo Lévy (1999), a forma como o ensino ocorre, pautado em modelos tradicionalistas, acaba tornando-se de certa forma obsoleto, pois a constante necessidade de renovação de saberes, as novas exigências do mercado de trabalho, e o ciberespaço, que mantém conhecimentos que ampliam e levam a criação de mudanças cognitivas.

Sendo assim, a rapidez das inovações tecnológicas, as diversas mudanças no mercado do trabalho e o surgimento de novos conhecimentos acabam por questionar os modelos tradicionais de ensino, que enfatizam a transmissão dos saberes.

O uso de tecnologias, em especial neste trabalho, o uso de softwares, não é garantia de aprendizagem, o instrumento tecnológico é uma máquina como qualquer outra e irá realizar aquilo que o ser humano programará para que faça. É claro que não podemos ter a visão inocente de que o *software* por si só arquiva, constrói, manipula objetos visualmente, é necessário a intervenção humana, para que todo o processo aconteça. O que importa em aulas que estejam pautadas na construção do conhecimento com uso de tecnologias, é de que forma o professor utilizará do instrumento tecnológico.

O *software* poderá mostrar aquilo que for programado, mas quem irá instigar, gerar discussão é o professor, a figura do professor é peça chave do processo educacional, e em aulas que utilizam *softwares*, assume o papel de mediador do conhecimento, só que uma mediação pautada na investigação, no questionamento, em desafiar seus alunos, colocá-los para pensar e refletir sobre toda a movimentação que notam no determinado *software*.

As possibilidades que os *softwares* representam, quando bem planejados e com tarefas que levem aos alunos a construção do saber, em termos de recursos didáticos, permitem práticas docentes mais coerentes com o atual perfil dos alunos. São ofertados vários *softwares* de Geometria Dinâmica, que possibilitam a visualização e movimentação das operações com Números Complexos. Entre eles salientamos o *software* livre Geogebra, que possibilita somar, subtrair, multiplicar e dividir Números Complexos, evidenciando as características geométricas e vetoriais, além de apresentar o conjugado e as raízes de tais números pelo fato de conter numa tela janelas geométricas (gráficas) e algébricas, dentre outras possibilidades como já caracterizado ao longo deste.

O uso das tecnologias de informação e comunicação (TICs), em especial dos *softwares*, pode ser uma ferramenta importante no processo da construção do conhecimento matemático dos alunos, visto que,

[...] o computador constitui hoje uma preciosa ferramenta capaz de apoiar a formulação de conjecturas, o estabelecimento de provas e de aprofundar o conhecimento sobre objetos que ajuda a visualizar. (SILVA et al., 1999, p.70).

As figuras desenhadas pelo professor no quadro-negro acabam por ser bastante rígidas. O dinamismo presente no *software* GeoGebra permite que aos estudantes, ao fazerem suas

conjecturas, levantarem suas hipóteses e as testarem, assim terão uma melhor percepção e compreensão visual do objeto estudado ou investigado.

Destacamos as investigações que buscam esse diálogo entre os aparatos tecnológicos do século XXI e a aula de Matemática. Para tanto, a sala de aula precisa ser considerada um lugar de investigação e construção de conhecimento.

Neste sentido, o professor tem papel fundamental no processo e deve agir como mediador, trabalhando com o aluno e não para o aluno, como é costume na nossa educação.

Os *softwares* educacionais estão adentrando sim no contexto escolar como ferramentas que podem ser usadas pelo professor, afim de dinamizar o processo de ensino-aprendizagem. Todavia, todo o trabalho de mediação passa pela dedicação e pelo esforço do Professor. Os *softwares* dinamizam os conteúdos e o trabalho do professor passa a ser de mediador entre o aluno e o conhecimento. Permitindo assim, exploração, visualização e experimentação.

Contudo para que estas ações de fato ocorram, é necessário que o professor esteja preparado, disposto a sair de sua zona de conforto para aprender o novo, isto é, inovar.

Constatamos que para o professor, independente da disciplina, é essencial seu preparo em relação a especificidade de seu conhecimento, conhecer bem o conteúdo de sua disciplina, para ministrar uma aula a contento. O educador deve dominar bem o software para assim, realizar um ensino do conteúdo com qualidade. Por fim, só podemos ter uma atitude de professor construtivista se realmente nos apropriarmos desse conhecimento. Mas não basta ter o conhecimento matemático, o conhecimento tecnológico e o construtivismo, é necessário fazer a integração desses três elementos para que a proposta funcione. (VAZ; JESUS, 2014, p. 61).

O potencial pedagógico de novas metodologias são uma forma de mostrar que as possibilidades para a aprendizagem do aluno podem ser ampliadas quando o professor está preparado para tanto e reconheça a importância de tais instrumentos em seu trabalho. Borba acrescenta que “O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica”. (2007, p. 16).

O uso das tecnologias, em especial o uso dos *softwares* no processo de ensino-aprendizagem vem ganhando destaque e conquistando seu espaço em pesquisas da Educação Matemática. Ressaltamos que não só na área de Matemática, mas como em outras. Bento (2010) reflete que “O computador pode causar uma grande revolução no processo de ensino e aprendizagem se for utilizado não para "informatizar" os processos tradicionais, mas se for introduzido na escola numa perspectiva de mudança da didática”. (p. 21).

Em conteúdos que envolvam o aspecto geométrico, os *softwares* ganham notoriedade pelo fato de ajudar o aluno a desenvolver habilidades de visualização, exploração maior dos

conceitos para a aquisição e formalização dos mesmos, por meio do seu aspecto dinâmico, que permite movimentar as figuras. D'Ambrósio, sobre a importância do uso dos recursos tecnológicos na escola, aponta que:

A modernização da Matemática nas escolas tornou-se uma preocupação em todos os países, sobretudo em vista da entrada da alta da tecnologia. Os trabalhadores e a população em geral, e sem dúvida técnicos e cientistas, necessitam de uma Matemática mais moderna. Novas posturas, novos métodos de ensino e até mesmo novos conteúdos se fazem necessários. (1999, p. 5).

O professor, ao debruçar no campo da pesquisa, isto é, que esteja preparado para o trabalho com tecnologias, pode, dessa forma, auxiliar os alunos na construção do conhecimento por meio da mediação. A pura inserção da tecnologia no contexto educacional sem um planejamento e reflexão prévia por parte do professor, não garantem aprendizagem, pois o simples apertar de teclas e o comportamento passivo do aluno frente às orientações fornecidas pelo professor (siga o modelo), continua fazendo dos alunos meros repetidores de tarefas. Isto é, o ensino precisa estar pautado na reflexão crítica acentuada na pesquisa e no trabalho conjunto, em que professor e alunos unam-se na prática da construção do conhecimento.

Lévy (1999) salienta que, os aparatos tecnológicos como os *softwares*, isto é, por meio do ciberespaço, os profissionais da educação podem ampliar seus conhecimentos, repensando suas práticas pedagógicas, encontrando diversas oportunidades de aprendizagem,

Uma vez que os indivíduos aprendem cada vez mais fora do sistema acadêmico, cabe aos sistemas de educação implantar procedimentos de reconhecimento dos saberes e *savoir-faire* adquiridos na vida social e profissional. (LÉVY, 1999, p. 175).

A educação precisa estar preparada para as inovações, pois as transformações oriundas com a tecnologia constam e precisam de novas metodologias de ensino, que exigem do professor outro papel, ampliando assim a ideia de novas formas de acesso à informação, novas formas de aprendizagem. Esse modelo de conhecimento, ajuda no combate a falácias que veem o conhecimento como algo pronto e acabado.

A inteligência coletiva também é ampliada pelo compartilhamento de ideias, troca de saberes e de informações. Em outras palavras, segundo o próprio Lévy (1999), o conhecimento passa a ser “democratizado”, característica esta que provém da “[...] terceira etapa da evolução humana”.

Contudo, o próprio autor reflete que estas questões ligadas ao ciberespaço, quando a democratização do conhecimento sofrem conflitos de interesse de vários setores da sociedade

como: estatal, mercadológico e da própria mídia, que por muitas vezes pressionada pelo estado, acaba por influenciar a população.

Muito mais importante do que transmitir informações, precisamos fazer com que os alunos desenvolvam habilidades e estratégias que despertem a autonomia, gerando assim a aquisição (generalização) de outros conhecimentos, pelos já construídos.

Acreditamos que os profissionais de matemática precisam utilizar múltiplos pontos de vista sobre um mesmo tema. Os Números Complexos apresentam, como mostrado neste texto, uma rica história que proporciona uma articulação entre a álgebra e a geometria.

Sem uma leitura que viabilize a reavaliação da aplicabilidade dos números complexos, será compreensível julgarmos que a expansão algébrica não é suficiente para mantê-los nas atuais propostas curriculares. (MATHIAS, 2015, p. 10).

Usufruímos desses elementos para desenvolver este trabalho promovendo algumas aplicações em outras áreas do conhecimento, como na Física.

Esperamos ainda que o uso do *software*, aliado ao bom planejamento do professor e a sua motivação para o trabalho possam incentivar, despertar o interesse dos alunos a uma proposta teórica diferente das que estão acostumados, apoiadas simplesmente na oralidade e na escrita.

Desta forma, esperamos também uma nova relação professor/aluno, com mais proximidade, interação e colaboração. A questão da substituição do professor acaba pois neste sentido, pelo fato de que apesar da interação *software* e aluno, esta interação só ocorrerá pela mediação do professor. Nenhuma máquina é capaz de substituir ou verificar indícios de formação do pensamento humano como outro ser humano, desta forma, a figura do professor é insubstituível no processo de ensino-aprendizagem. Daí se volta a reflexão de Mello (2005) quanto à importância do outro no processo de aquisição do conhecimento e da cultura.

Somente com a escolha de um *software* adequado aos objetivos e ao trabalho que pretende desenvolver é que o ambiente informatizado contribuirá positivamente com o processo de construção de conhecimento, por meio da visualização, experimentação, interpretação, demonstração, resultando em ações que desafiem os alunos. Para tanto, segue o próximo tópico em que tecemos algumas reflexões sobre o *software* GeoGebra que também faz parte deste trabalho.



### 4.3. O GeoGebra

Muitos programas de computador já são utilizados e aplicados no contexto educacional, porém já existem alguns *softwares* desenvolvidos especificamente para a educação Matemática, como é o caso do GeoGebra, que será utilizado com a finalidade de reproduzir os conteúdos dos números complexos.

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que une geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido principalmente para o ensino-aprendizagem da matemática nas escolas básicas e secundárias, pelo austríaco Ph. D. Markus Hohenwarter no ano de 2002, na universidade americana Florida Atlantic University.

O *software* GeoGebra é classificado como um software dinâmico, pois permite construir vários objetos: pontos, vetores, segmentos, retas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem ser modificados dinamicamente, isto é, em outras palavras, é um *software* que permite movimentação de acordo com a necessidade.

Dentre as vantagens, destacamos:

- Construção de figuras geométricas, de modo a movimentá-las sem perder suas propriedades;
- Criação de novas ferramentas e adicionar na barra de menu;
- Permite que seus arquivos sejam facilmente compartilhados em outros programas de computação;
- É um *software* livre;
- Interface de fácil compreensão e manuseio;

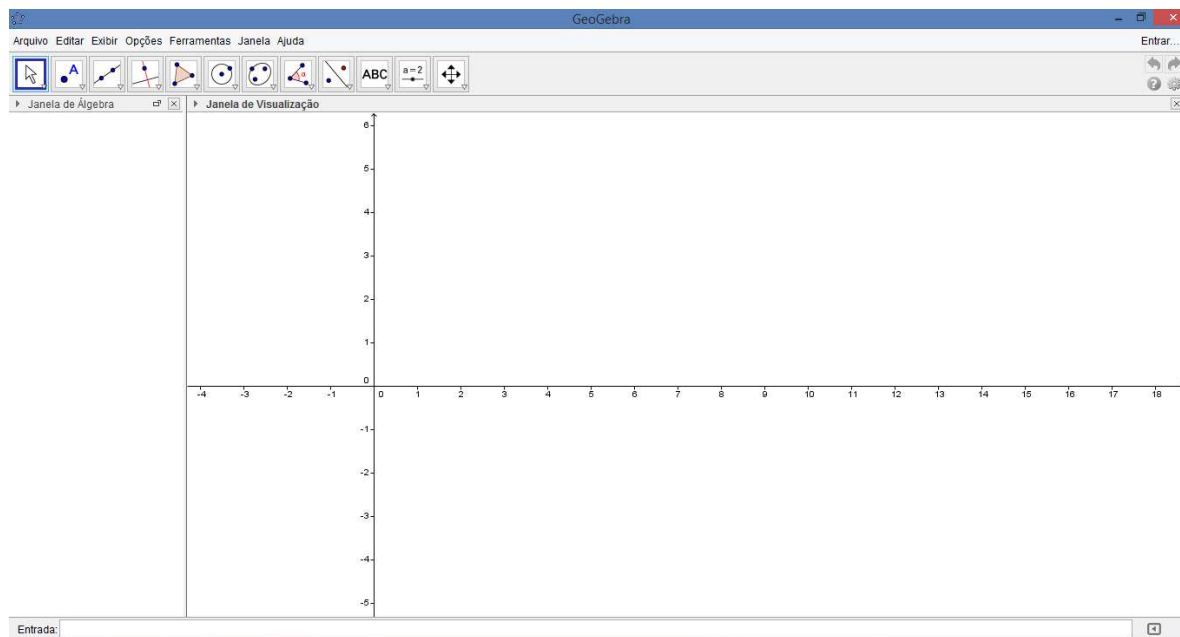


Figura 1: Interface do Software GeoGebra (tela inicial)

Por outro lado, equações e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado. O GeoGebra tem a vantagem de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Permite determinar derivadas e integrais de funções e oferece um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes ou extremos.

Estas duas perspectivas caracterizam o GeoGebra: a uma expressão na janela algébrica corresponde um objeto na janela de desenho (ou zona gráfica) e vice-versa.

A janela geométrica é o local destinado à construção e movimentação dos objetos. É possível modificar e colorir os objetos, alterar a espessura de linhas, medir ângulos, medir distâncias, exibir cálculos, etc.

É um *software* de fácil aquisição, visto que se trata de um *software* Freeware, ou seja, é livre para baixar em computadores, distribuir entre colegas e alunos e de fácil acesso, visto que está disponível gratuitamente em vários idiomas na internet. Está escrito em linguagem Java e está disponível em múltiplas plataformas.

Vale ressaltar que para o bom funcionamento, é necessário que o computador contenha já instalado o Java, pois esta é a plataforma em que este programa funciona.

Além disso, no *website* do projeto, podemos adquirir uma série de interações e matérias de ajuda elaborados pela comunidade GeoGebra mundial.

## 5 O DESENVOLVIMENTO LÓGICO E HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A História da Matemática ajuda na compreensão de como os conceitos foram tratados, criados e desenvolvidos em diferentes regiões e períodos e permanecem até os dias atuais, o que facilita a organização do ensino, com a consciência de porquê e para que organizar os mesmos. O movimento lógico-histórico é evidenciado na medida em que os conhecimentos são compreendidos aqui como resultados do processo de trabalho, da ação do homem sobre a natureza, uma vez que as necessidades se modificam de acordo com as exigências da sociedade. Merece nossa atenção o fato de que a Didática tradicional, conforme denomina Davydov (1988), não considera, por exemplo, o movimento lógico-histórico presente nos conceitos que são tratados nas escolas. Assim, para um estudo mais completo dos Números Complexos, é necessário passarmos por sua história para entender suas conotações diferentes em períodos distintos de seu desenvolvimento. Destarte, a história da Matemática neste trabalho é parte integrante do Experimento Didático Formativo.

### 5.1. HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Diariamente, os alunos questionam sobre os porquês matemáticos e da forma como são tratados. A ideia dos números complexos já foi, ao longo da história, algo difícil de ser aceita e compreendida. Ao resolverem uma equação que resultasse em um número negativo, era como se esta não tivesse solução.

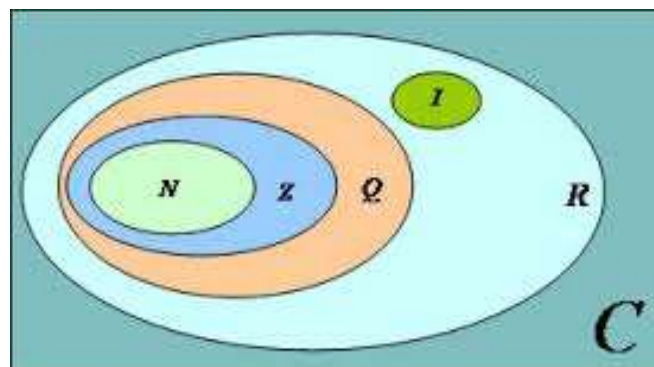


Figura 2: Diagrama dos Conjuntos Numéricos

O conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Algumas equações de segundo grau, como  $x^2 + 1 = 0$  não haviam solução até o século XVI, pois para os matemáticos da época a raiz quadrada negativa não

existia. Porém, não foi este o motivo pelo qual os números complexos surgiram, pois com o passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações do 3º grau.

Ao longo do desenvolvimento da ciência, haviam diversas disputas de talentos quanto ao conhecimento matemático. A equação de grau 2, já não despertava mais interesse pois era um problema resolvido. A partir do século XVI, a pesquisa agora estava voltada para as equações de grau 3.

Por volta da metade do século XV, teve início na Europa Medieval o fenômeno sócio cultural conhecido como Renascença. Tratou-se de um momento de explosão criativa e produtiva nas artes plásticas, literatura, arquitetura e ciências. Seu epicentro foi na Itália, onde surgiram vários estudiosos, dentre os quais destacamos Leonardo da Vinci, Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Niccoló Tartaglia, Ludovico Ferrari e Galileu Galilei

Queremos, portanto, deixar claro desde então que, os Números Complexos foram construídos para o desenvolvimento das equações cúbicas pelos estudos e pesquisas do italiano Scipione del Ferro (1465-1526), que era professor de Matemática da Universidade de Bolonha. Ele conseguiu resolver algebricamente, por volta de 1515, a equação cúbica  $x^3 + mx = n$ , baseando em relatos históricos em trabalhos árabes. Contudo, ele não publicou seu feito<sup>10</sup>, mas revelou o segredo a Antonio Fior. Em 1535, Tartaglia (1500-1557), embora o nome verdadeiro deste fosse Niccoló Fontana de Brescia, disse que também havia descoberto uma solução para a cúbica  $x^3 + px^2 = n$ .

Antônio Fior duvidando disso, desafiou Tartaglia para uma disputa pública (GOUVÊA 2010). Naquela época eles eram pagos por patronos ricos para estudarem e tinham que manter os seus sustentos por meio de competições, em que cada estudante desafiava o seu competidor para resolver algo que até então só ele sabia. Daí, como só eles conheciam o método de resolução de equações cúbicas, era fácil desafiar os demais, sendo que os mesmos ainda desconheciam o método de resolução. Tartaglia aceitou o desafio e com muita dedicação conseguiu resolver poucos dias antes da disputa uma equação sem o termo quadrático (incompleta). Logo, como sabia resolver dois tipos de equações cúbicas, vencera o desafio.

Girolamo Cardano (1501-1576) prometendo a Tartaglia guardar segredo sobre o método de resolução de algumas equações cúbicas, convenceu este a lhe ensinar o método de resolução. Em 1539, obteve sob a forma de versos enigmáticos, a solução da equação  $x^3 +$

---

<sup>10</sup> Naquela época, na Itália, eram comuns as disputas intelectuais. A permanência em alguns cargos, inclusive, dependia de um bom desempenho nestes duelos. Pesquisas mostram que Scipione não tenha publicado sua descoberta para mantê-la como vantagem sobre seus oponentes.

$mx = n$ . Esses versos foram publicados por Tartaglia na página 120 de seu livro “*Quesiti et inventioni diverse*”, cuja tradução para o português é semelhante ao exposto a seguir:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço  
Se igualam a qualquer número discreto  
Acha dois outros diferentes nisso
2. Depois terás isto por consenso  
Que seu produto seja sempre igual  
Ao cubo do terço da coisa certo
3. Depois, o resíduo geral  
Das raízes cúbicas subtraídas  
Será tua coisa principal
4. Na segunda destas operações,  
Quando o cubo estiver sozinho  
Observarás estas outras reduções
5. Do número farás dois, de tal forma  
Que um e outro produzam exatamente  
O cubo da terça parte da coisa
6. Depois, por um preceito comum  
Toma o lado dos cubos juntos  
E tal soma será teu conceito
7. Depois, a terceira destas nossas contas  
Se resolve como a segunda, se observas bem  
Que suas naturezas são quase idênticas
8. Isto eu achei, e não com passo tardo  
No mil quinhentos e trinta e quatro  
Com fundamentos bem firmes e rigorosos  
Na cidade cingida pelo mar.

(MILIES, RPM 25, *apud* MATOS, 2014, p. 20)<sup>11</sup>

Tartaglia teve uma vida muito difícil. Nascido em Brescia, ficou órfão de pai aos seis anos de idade e foi criado juntamente com seus três irmãos pela mãe em péssimas condições. Aos 14 anos de idade, Brescia foi invadida por tropas francesas, e um dos soldados feriu seriamente o rosto deixando-o quase sem falar. Por este motivo lhe deram o apelido de Tartaglia (gago).

Mesmo com uma vida difícil, Tartaglia sempre foi interessado pelos estudos, apesar das paupérrimas condições em que vivia. Mal começou a ser alfabetizado e sua mãe o tirou da escola, por não ter condições de pagá-la. Mesmo assim, passou a estudar por si só nos raros livros a que conseguia ter acesso. Mesmo com todas essas dificuldades, Tartaglia contribuiu de

---

<sup>11</sup> Nestes versos observamos a incógnita, isto é, a quantidade desconhecida sendo chamada de coisa. Este livro mais tarde ficou conhecido como “*Ars Magna*” de Cardano.

forma significativa para o conhecimento matemático da época e, por volta de 1530, tornou-se professor de ciências em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza.

Já Cardano, era médico, astrônomo, astrólogo, matemático, filósofo, jogador e um incansável investigador, cuja curiosidade e interesse por todos os tipos de conhecimento não tinham limites. Escreveu muitos livros sobre todos estes assuntos, inclusive uma reveladora autobiografia, na qual se definiu como desbocado, melancólico, invejoso, solitário, desonesto e tinha desprezo por religião.

Ao começar a estudar a fórmula de Tartaglia, Cardano se deparou com raízes de números negativos. Cardano deduziu as fórmulas para resolver 13 tipos<sup>12</sup> de equações do terceiro grau, as quais hoje se reduzem a uma única, mas não podia publicar, pois havia prometido a Tartaglia.

Em 1542, Cardano e Ferrari, ao visitar Bolonha, obtiveram permissão de Della Nave<sup>13</sup> para examinar os manuscritos deixados por Scipione del Ferro. Em seus materiais, Cardano e Ferrari encontraram a solução da equação  $x^3 + mx = n$ . Isso permite que, em 1545, Cardano publique a resolução das equações do 3º grau no livro “Ars Magna” (A Grande Arte), uma vez que o juramento de Cardano o proibia de publicar a solução de Tartaglia, mas não a de Scipione del Ferro.

No ano seguinte, Tartaglia publica os “Quesiti e Inventioni Diverse”, no qual apresenta soluções para vários problemas que lhe foram propostos e descreve a história de sua relação com Cardano, atacando-o severamente pela quebra de um solene juramento.

A grande Arte continha a solução das cúbicas, com o seguinte problema: “Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40”, e o resolve através dos radicais de maneira similar às equações de 2º grau. Ele resolveu o problema de dividir o número 10 em duas partes, cujo produto é 40; provou que  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ , raízes de  $x^2 + 40 = 10x$ , constituem sua solução.

O livro A Grande Arte era uma espécie de:

[...] tratado erudito (escrito em latim) que dava uma explicação completa, com elaboradas demonstrações geométricas, sobre como resolver equações cúbicas. Incluía também uma solução para equação geral do quarto grau que tinha sido descoberta por um estudante de Cardano, Lodovico Ferrari (1522-1565). (GOUVÊA, 2010, p. 38-39)

<sup>12</sup> É importante ressaltar que as equações a serem resolvidas naquela época eram todas numéricas. Existiam procedimentos para a determinação de raízes de diferentes tipos de equações cúbicas

<sup>13</sup> Na época, Scipione não publicou sua descoberta, mas a revelou para Annibale Della Nave, que mais tarde veio a ser seu genro.

Tartaglia, como vimos, protestou furiosamente e publicamente a atitude de Cardano, por ter descumprido com o trato, todavia nada pode fazer. Daí a fórmula para a resolução das cúbicas, ser usualmente até os dias atuais denominada de “fórmula de Cardano”, contudo em alguns países a denominação já aparece como, fórmula de Cardano -Tartaglia.

Podemos deduzir a fórmula resolutive das equações do terceiro grau por meio de radicais.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Fazendo:  $x = y - \frac{a}{3}$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b \left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\ y^3 - 3y^2 \frac{a}{3} + \frac{3ya^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c &= 0 \\ y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\ y^3 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\ y^3 - \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\ y^3 - \frac{a^2y}{3} + \left(\frac{-a^3 + 3a^3}{27}\right) + by - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\ y^3 - \frac{a^2y}{3} + \frac{2a^3}{27} + by - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\ y^3 - \frac{a^2y}{3} + by + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\ y^3 + \left(\frac{-a^2}{3} + b\right)y - \left(\frac{-2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c\right) &= 0, \end{aligned}$$

sejam  $m$  e  $n$  os termos entre parênteses em sequência, temos:

$$y^3 + my - n = 0$$

$$y^3 + my = n,$$

Antes de prosseguir a resolução, é interessante observar o comportamento da identidade de uma equação cúbica.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3a^2b - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$$

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3,$$

fazendo  $(a - b) = y$  e  $3ab = m$ , temos que

$$b = \frac{m}{3a} \quad (I)$$

$$y^3 + my = a^3 - b^3,$$

fazendo  $a^3 - b^3 = n$ , tem se: (II)

$$y^3 + my = n$$

Comparando as duas equações e substituindo I em II, temos que:

$$a^3 - \frac{m^3}{27a^3} = n$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $27a^3$ , teremos:

$$\begin{aligned} a^3(27a^3) - \frac{m^3}{27a^3} (27a^3) &= 27a^3n \\ 27a^6 - 27a^3n - m^3 &= 0, \end{aligned}$$

fazendo  $a^3 = z$ , temos:

$$27z^2 + 27zn - m^3 = 0,$$

por Bháskara

$$z = \frac{27n \pm \sqrt{27^2n^2 + 4 \cdot 27m^3}}{2 \cdot 27}.$$

Utilizando a solução com adição<sup>14</sup>, temos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{27n}{2 \cdot 27} + \sqrt{\frac{27^2n^2}{2^2 \cdot 27^2} + \frac{4 \cdot 27m^3}{2^2 \cdot 27^2}} \\ \Rightarrow z &= \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} \\ \Rightarrow a^3 &= \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} \\ \Rightarrow a &= \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} \end{aligned}$$

Sendo  $a^3 - b^3 = n$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} - b^3 &= n \\ \Rightarrow b^3 &= -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} \end{aligned}$$

---

<sup>14</sup> Utilizamos a parte positiva, pois a parte negativa é feita do mesmo modo.



$$\Rightarrow b = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$$

Logo:

$$y = a - b = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$$

Usando esta fórmula para resolver a equação,  $x^3 = 15x + 4$ , Cardano encontrou a sentença abaixo,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

Contudo não percebeu que uma das raízes dessa equação era 4. Pois,

$$x^3 = 15x + 4,$$

Deixando a incógnita somente de um lado, temos:

$$x^3 - 15x = 4,$$

Colocando x em evidência teremos:

$$x(x^2 - 15) = 4$$

Logo encontramos uma solução inteira:

$$x = 4,$$

Ao olharmos a solução que Cardano encontrara para a equação, nos deparamos com um fato interessante. Além da extração de raízes quadradas de números negativos, também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas. A presença tradicional das representações de equações cúbicas de Cardano ocorreu pela fase retórica<sup>15</sup>, em que o mesmo, segundo Gouvêa (2010, p. 39), teria escrito a equação abaixo provavelmente desta forma “cubus. aeq.15. cos. p.4”, o que para ele deveria ser lido como: “um cubo é igual a 15 coisas mais 4”:

$$x^3 = 15x + 4$$

---

<sup>15</sup> A linguagem matemática passou por fases de desenvolvimento, dentre elas destacamos: o retórico (verbal), o sincopado (abreviações de palavras) e o simbólico que passou por várias transformações até se tornar estável. O estilo retórico é caracterizado pela descrição de procedimentos, em que instruções verbais fornecidas eram aplicadas a uma sequência de casos específicos (VAILATI; PACHECO, s/ ano, p. 8).

Durante as resoluções das equações de segundo grau com a fórmula de Bháskara, obtemos uma raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções. Agora, a equação é de terceiro grau com soluções reais conhecidas<sup>16</sup>, mas que para tanto é necessário a extração de raízes quadradas de números negativos.

Não havia como negar a necessidade da expansão ou ampliação dos conjuntos numéricos, pois os números reais já não eram mais suficientes.

Foi Rafael Bombelli (1526-1572), matemático italiano, nos anos de 1560 que se dedicou ao estudo da fórmula de Cardano-Tartaglia, dando importância aos números complexos, propondo uma alternativa que o mesmo denominou de “nova espécie de radical”.

Gouvêa (2010) aponta que ao falar de raiz quadrada de um número negativo, ele inventou uma diferente linguagem. Em vez de falar  $2 + \sqrt{-121}$  como “dois mais a raiz quadrada de menos 121”, ele dizia “dois mais de menos a raiz quadrada de 121”, de modo que “mais de menos” se tornou o código para somar a raiz quadrada de um número negativo. Subtrair tal raiz quadrada ficou “menos de menos”. Como  $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1}$ , ele também se referia a isso como:

dois mais de menos 11”. E explicava as regras de tais operações como: mais de menos vezes mais de menos faz menos; menos de menos vezes menos de menos faz menos; e mais de menos vezes menos de menos faz mais. É natural, para nós, interpretar isso como:  $i$  vezes  $i$  é  $-1$ ;  $-i$  vezes  $-i$  é  $-1$ ; e  $i$  vezes  $-i$  é  $1$ . (p. 183).

Rafael Bombelli fazendo  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$  (que é a notação atual), com isso ele obteve  $a = 2$ ,  $b = 1$  e daí  $x = 4$ . Bombelli foi muito além desta resolução. Em seu livro “Álgebra Opera”, aparece a teoria dos números complexos, pela primeira vez, razoavelmente bem estruturada. Vale ressaltar que ao longo dos tempos Cardano e nem Bombelli, usavam as seguintes notações atuais,  $\sqrt{-15}$  e  $\sqrt{-n}$ , com  $n > 0$ .

Bombelli, em seu livro Álgebra Opera, desenvolveu o método de resolução de equações cúbicas que envolvia raízes quadradas de números negativos. Segundo Imenes e Lellis (2002, p. 201), o matemático italiano Bombelli, em 1572, escrevia a equação 3.p.2 equale à 14 da seguinte forma:

$$3x^2 + 2 = 14$$

---

<sup>16</sup> Por fatoração obteremos  $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$  e as raízes de  $x^2 + 4x + 1 = 0$ , são:  $-2 + \sqrt{3}$  e  $-2 - \sqrt{3}$ .

Assim, pela primeira vez, admitia a possibilidade da existência de um número da forma  $a + \sqrt{-b}$ , em que  $a$  pertence ao conjunto dos números reais e  $b$  aos reais positivos diferentes de zero.

Júnior (2009) observa que:

[...] pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e podendo ser resolvidas por um mesmo método, mas naquela época, quando os coeficientes negativos ainda não eram utilizados, existiam 13 diferentes tipos de equações cúbicas, que dependiam da posição do termo quadrático, do linear e do termo numérico. (p.16).

Contudo, Bombelli não estava veridicamente pensando nesses “novos tipos de radicais” como números, pois parecia propor regras formais que lhe permitisse simplificar expressões complicadas. Segundo Gouvêa (2010), o trabalho de Bombelli é de suma importância, pois mostrou que em algumas vezes as raízes quadradas de números negativos são necessárias para que se encontrasse as raízes reais. Ou seja, nem sempre o aparecimento de “[...] tais expressões (...) é um sinal de que o problema não é solúvel” (p.183).

Este foi, para Gouvêa (2010) o primeiro marco de que os números complexos poderiam ser na realidade ferramentas matemáticas de grande importância na resolução de outro problema. Contudo, na sociedade da época ainda persistiu a ideia de que as raízes complexas eram inúteis, impossíveis, sofisticadas, dentre outras denominações.

Segundo Júnior (2009), a primeira edição de L’ Algebra foi publicada em 1966, obra de Bombelli, é dividida em 5 livros, dos quais os três primeiros referem-se a álgebra e os dois últimos são dedicados a geometria. Neste livro os números imaginários são abordados juntamente com definições de conceitos elementares, como potências, raízes, binômios e as operações que os envolvem.

### 5. 1.1 A Unidade Imaginária

Depois de Bombelli, em 1530, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Leonardo Euler (1707-1783).

Euler, como era conhecido, nasceu em Basileia, Suíça. Foi um dos matemáticos que mais produziu e publicou em todos os tempos, além de ter sido muito boa pessoa. Aos 28 anos

perdera a vista esquerda e viveu totalmente cego nos últimos 18 anos de sua vida. Período este em que continuou produzindo.

Leonardo Euler, num trabalho de 1777, definiu  $\sqrt{-1}$  como sendo  $i$ , de forma que  $i^2 = -1$  chamando de unidade imaginária. Esta mesma notação foi usada por Carl Fredrich Gauss (1777-1855) em 1801, se tornando um padrão da forma algébrica de um número complexo.

Mesmo fazendo uso e realizando operações, as dúvidas quanto a veracidade sobre a existência dos números sofisticados que conhecemos por Números Complexos, permaneceram por muitos anos, ou seja, a dificuldade estava na compreensão do próprio conceito.

Somente no início do século XVIII é que alguns matemáticos europeus passaram a usar os números negativos em seu trabalho. Talvez os números complexos possam já ter sido pensados daí, pois,

No início do século XVII, Descartes chamou as soluções negativas (raízes) de “falsas” e as soluções envolvendo raízes quadradas negativas de “imaginárias”. Nas palavras de Descartes, a equação  $x^4 = 1$ , por exemplo, tem uma raiz verdadeira (+1), uma raiz falsa (-1) e duas raízes imaginárias ( $-\sqrt{-1}$  e  $\sqrt{-1}$ ). Além disso, o uso de coordenadas para o plano de Descartes não utilizava números negativos da mesma forma que o familiar sistema de coordenadas cartesiano. (GOUVEA, 2010, p. 98).

Segundo Gouvêa (2010, p.181) Cardano diz em uma de suas obras que: “ $\sqrt{9}$  é +3 ou -3, pois um mais [vezes um mais] ou um menos vezes um menos dão um mais. Portanto,  $\sqrt{-9}$  não é nem +3 nem -3, mas alguma terceira espécie de coisa misteriosa”.

Gouvêa (2010) aponta que:

[...] no início do século XVII, René Descartes lembrou que, quando se tenta achar o ponto de interseção de uma reta e um círculo, é preciso resolver uma equação quadrática. A fórmula quadrática leva à raiz quadrada de um número negativo exatamente quando a reta, de fato, não corta o círculo. (p. 181-182).

Daí percebemos que o sentimento era de que mais uma vez, o aparecimento de soluções ditas por eles na época por “impossíveis” ou “imaginários” era simplesmente um sinal de que não havia solução.

### 5.1.2 Representação do Plano de Argand-Gauss e Operações

A ideia de empregar sistema de coordenadas para definir posições de pontos no plano e no espaço já haviam sido utilizadas no século III a. C por Apolônio, em seus trabalhos sobre seções cônicas.

O termo “Número Complexo” foi atribuído por Gauss em 1831, que explicou como os números complexos poderiam ser desenvolvidos, apoiados em sua representação geométrica. Antes de Gauss, outros estudiosos já haviam imaginado os números complexos geometricamente, como o suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818), todavia, segundo relatos, o pouco reconhecimento e fama que tinham na época fizeram com que esses matemáticos não alcançassem a merecida notoriedade da época.

Gauss imaginava essa representação geométrica por pontos no plano, já Wessel e Argand usavam segmentos de reta orientados ou vetores coplanares.

No ano de 1837 Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) consolidou de fato as descobertas, ao reconhecer os números complexos como par ordenado de números reais  $(a, b)$  contribuindo assim para o trabalho de Gauss.

Foi somente depois dos trabalhos de Bombelli, dentre outros matemáticos italianos, que contribuíram para que os números sofisticados perdessem parte de sua característica mística, começando a serem aceitos apenas no século XIX com os trabalhos de Wallis, Wessel, Buée e Argand.

William Rowan Hamilton (1805-1865) introduziu a forma dos números complexos, passando a ser encarados como pares ordenados  $(a, b)$  de números reais, com os quais se operavam da seguinte forma:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Vale ressaltar que, dado um par ordenado como  $(a, 0)$ , obtemos um número real,

$$z = a = a + 0i.$$

Em suma, a história do conhecimento matemático, em especial a história dos números complexos, foi sendo construída num processo de evolução muito longo, e no caso desses números por diversos matemáticos. Os números complexos, assim como os demais conhecimentos matemáticos, foram construídos historicamente pela humanidade. Mas o seu reconhecimento na matemática só ganhou impulso e legitimação com a sua interpretação geométrica, no século XIX.

O conjunto dos números complexos compreende todos os reais e os chamados números imaginários, representados por pares ordenados, nos quais a abscissa é um número real e a ordenada, um número imaginário. Sabemos que, em matemática, a unidade imaginária  $(\sqrt{-1})$  é

indicada por  $i$ , e em eletricidade, por exemplo, para não se confundir com a corrente elétrica, usualmente é indicado por  $j$ .

O surgimento dos Complexos como consta ao longo deste, desencadeou uma ampliação dos conjuntos numéricos.

De fato, ao considerarmos um complexo  $z = a + bi$ . Se  $b = 0$ , tem  $z = a$ ; logo,  $Z \in R$ . No entanto, qualquer número real  $x$  pode ser indicado por  $x + 0i$ . Como  $x \in R$  e  $0 \in R$ ,  $(x + 0i)$  pertence aos números complexos. Todo número real é complexo, mas nem todo número complexo é real, pois um número complexo pode possuir uma parte imaginária, mas os números reais não a possuem, isto é, o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos.

É necessário, pois, compreender os processos das operações (geométricas, aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

Consideramos o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$  do plano cartesiano, em que  $(a, b) \in R$ . Valem as seguintes definições:

$$\text{Igualdade: } (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

$$\text{Adição: } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\text{Multiplicação: } (a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Para verificarmos a representação geométrica de um número complexo e compreender as operações deste ponto de vista, utilizamos os seguintes dados:

$$z = a + bi \Rightarrow z = (a, b)$$

$$w = c + di \Rightarrow w = (c, d)$$

$$\text{Adição: } z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Subtração: } z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\text{Multiplicação: } z * w = (a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para a divisão, consideramos dois números complexos  $z$  e  $w$ , sabendo que  $w \neq 0$ , podemos efetuar a divisão entre  $z$  e  $w$  por meio de um processo semelhante à racionalização de denominadores.

Para obtermos o quociente  $\frac{z}{w}$ , multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado<sup>17</sup> do denominador  $w$ . Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{z * \bar{w}}{w * \bar{w}}$$

Notemos que:

- O número real zero é representado pelo ponto (0,0);
- Todo número complexo real tem a sua parte imaginária igual a zero. Logo, sua imagem é um ponto pertencente ao eixo real (Re);
- Todo número complexo imaginário puro tem a sua parte real igual a zero. Logo, sua imagem é um ponto pertencente ao eixo imaginário (Im).

Sabemos que o vetor é um segmento de reta orientado que contém três características: direção, sentido, módulo ou intensidade. Podemos notar ainda que todo vetor do plano é determinado por dois pontos do plano (uma origem e uma extremidade).

Dessa forma, os números complexos ganham uma interpretação geométrica e além da visualização essa abordagem proporciona que seja estabelecida uma relação biunívoca entre os números complexos e os vetores no plano. Com isso, muitos problemas que envolvem os números complexos podem ser resolvidos através de conceitos vetoriais.

Sabemos que, todo complexo  $z = a + bi$ , pode ser representado geometricamente por um ponto  $P(a, b)$  no plano de Argand - Gauss. Um número complexo não nulo pode ser representado também por um vetor  $OP$  de origem no ponto  $(0, 0)$ , origem do plano complexo, e extremidade no ponto  $P(a, b)$ .

---

<sup>17</sup> Dado um número complexo  $z = a + bi$ , chamamos de conjugado de  $z$ , o complexo  $\bar{z} = a - bi$ ;

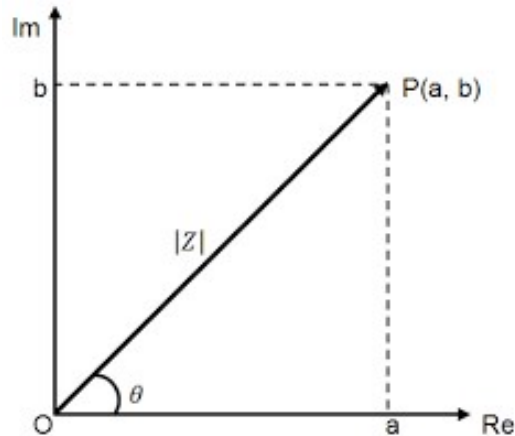


Figura 3: Representação de um Número Complexo no Plano

Com todos esses fatos esclarecidos, os números complexos seguiram mantendo um ar de mistério até a virada do século XVIII para o XIX.

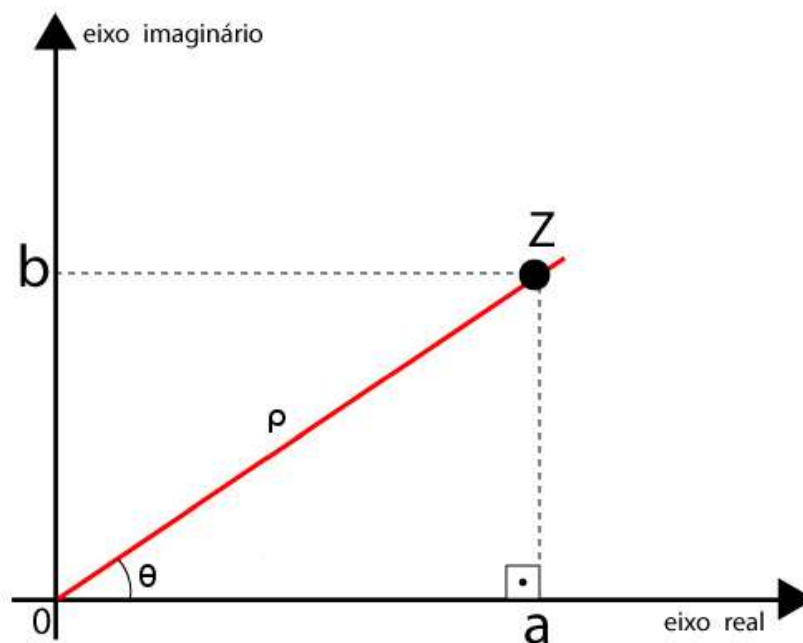


Figura 4: Plano de Argand-Gauss

Na figura acima, observa-se que,  $\rho$  sendo o módulo de  $a + bi$ , ou seja, o vetor soma  $OZ$ , onde  $a + bi$ , é um número complexo qualquer expresso como combinação geométrica de  $a$  e  $b$ , e  $\theta$  é o coeficiente angular de  $OZ$ .

Usando a trigonometria do triângulo retângulo, no caso do objeto da figura acima, temos:

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

Com base na imagem, temos que:

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{a}{r} \rightarrow a = r\operatorname{cos}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \rightarrow b = r\operatorname{sen}\theta$$

Desta forma:

$$z = a + bi = r\operatorname{cos}\theta + i r\operatorname{sen}\theta = r(\operatorname{cos}\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Didaticamente a unidade imaginária  $i$ , serve de padrão para a representação do eixo imaginário. Percebemos ainda que o módulo, de um complexo é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Que mede a distância da extremidade  $P(a, b)$ , até a origem do sistema de coordenadas. O ângulo que o segmento de reta  $OP$  forma com o eixo real é o argumento de  $z$ , comumente representado pela letra grega *teta*  $\theta$ .

## 5.2 Apresentação dos Números Complexos nos livros didáticos

A importância dos números complexos está marcada pelas suas múltiplas aplicações em diversas áreas como na Física, Engenharia, Tecnologia, Funções de variáveis complexas, um campo específico da Matemática.

Esses comumente são associados por alunos e por alguns professores, puramente para dar sentido à raiz quadrada de números negativos. Desta forma, é necessário aprender a representação dos números complexos, a sua representação geométrica e operações.

Neste sentido, é notável uma mudança metodológica para que tenhamos uma aprendizagem eficaz, que apresente aplicações dos Números Complexos em problemas vistos no cotidiano e ainda, em outras áreas do conhecimento.

Ao longo da evolução histórica deste conceito matemático, a representação geométrica permitiu que os complexos fossem visualizados, para só então serem aceitos como números. Foi a necessidade imposta pelo método de Cardano, de trabalhar com os números complexos antes de compreendê-los como números, que determinou o uso das raízes de números negativos antes dos negativos serem aceitos como números.

O livro didático serve de referência tanto para alunos quanto para professores, com conteúdos que compõem a grade curricular, sendo fator relevante na construção do

conhecimento de alunos e professores, pois aparece como um dos instrumentos reguladores do ensino, tendo como objetivo normalizar o que vai ser ensinado na escola, o saber ensinar.

Com o objetivo de conhecer um pouco mais a respeito dos livros didáticos, bem como verificar e entender o tratamento dado aos Números Complexos, optamos, ao longo deste trabalho, pela análise dos livros de Matemática abaixo:

Quadro 1: Dos Livros Didáticos Analisados

<b>Livro</b>	<b>Título</b>	<b>Autores</b>	<b>Editora</b>	<b>Ano</b>
01	MATEMÁTICA: Ciência e Aplicação.	IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; ALMEIDA, Nilze.	Atual .	2004
02	Matemática.	PAIVA, Manoel.	Moderna.	2009
03	Matemática.	DANTE, Roberto.	Ática.	2008
04	Conexões com a Matemática.	BARROSO, Juliana Matsubara.	Moderna.	2010
05	Matemática.	PAIVA, Manoel.	Moderna.	2013
06	Novo olhar- Matemática.	SOUZA, Joamir Roberto de.	FTD.	2010
07	MATEMÁTICA: Ensino Médio.	SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez.	Saraiva.	2004
08	Multicurso Ensino Médio: Matemática.	BORDEAUX, Ana Lúcia. et. al.	Fundação Roberto Marinho.	2005
09	Matemática Completa.	GIOVANNI, José Ruy. BONJORN, José Roberto.	FTD.	2005
10	MATEMÁTICA: Volume único.	IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto.	Atual.	2007

Fonte: O autor.

Para esta análise, foram objetos de observação:

- Número de páginas do livro destinadas aos números complexos;
- Quantidade de exercícios referentes aos números complexos;
- Comparação da quantidade de exercícios envolvendo a representação geométrica e algébrica dos números complexos;
- Quantidade de exercícios envolvendo aplicação destes conceitos (contextualização);
- Relação entre álgebra e geometria;
- Se o livro didático contempla a História dos Números Complexos.

Ao analisar os livros de Matemática para o Ensino Médio citados, constatamos, como ver-se-á a seguir, que os números complexos são apresentados de uma forma padrão, ou seja, um fato histórico é citado, sem estar relacionado com o conteúdo a ser desenvolvido e apresenta uma revisão dos conjuntos numéricos até chegar aos números complexos; em seguida, são apresentadas três maneiras de representar os números complexos, quais sejam: por pares ordenados, na forma algébrica e na forma trigonométrica (que também é algébrica) e, a partir dessas representações, são definidas as operações e propriedades básicas, como adição e multiplicação, sem relacioná-las com as transformações geométricas que podem ser vistas e interpretadas no plano cartesiano complexo.

Com este viés puramente algébrico, professores e os livros didáticos acabam perdendo a oportunidade de mostrarem os números complexos como entes geométricos, não dando assim a referida atenção a orientação histórica, o que acarretaria uma discussão mais ampla e interessante para os alunos. Desde o início precisa ficar claro para o aluno que, o número complexo é um ente geométrico que pode ser representado também algebricamente e mais, que sua utilidade não é apenas afim de solucionar raízes negativas das equações de segundo grau. Segundo Carvalho e Lopes,

Com a discussão da geometria, por meio da relação com os números complexos, abrem-se fronteiras do real (R) para o complexo (C), propiciando o entendimento de novos fenômenos como, por exemplo, a própria existência dos números complexos. (s/a, p. 3).

Enfim, o conteúdo não é contextualizado, há um apego ao uso de fórmulas e definições algébricas, e, conseqüentemente, os exercícios em grande parte são aplicações diretas dessas fórmulas.



## 6 O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DE CONTRIBUIÇÕES DAVYDOVYANAS

Este capítulo é dedicado a caracterização da pesquisa, descreve os sujeitos envolvidos na mesma e as análises acerca da constituição do Experimento Didático Formativo. Nesta constituição do ensino, inserimo-nos nesse local como corresponsáveis pela produção de saberes, afim de interpretar e compreender o fenômeno da produção de sentidos dos princípios da proposta didática no espaço de aprendizagem numa perspectiva lógico-histórica, organizando situações ou momentos de aprendizagem em que os alunos estivessem em compartilhamento e, em contato uns com os outros. Durante a execução do plano, as atividades de estudo conduziram a alguns momentos considerados fundamentais para a análise da pesquisa, que são discutidos em espaços elencados neste trabalho de momentos de ensino. Analisamos ainda questões ligadas a avaliação escolar segundo os critérios vygotskyanos.

### 6.1 Elaboração das Tarefas

Como já citado, caracterizamos a pesquisa por meio de um Experimento Didático Formativo pautado no Ensino Desenvolvimental, direcionado ao processo de ensino-aprendizado dos Números Complexos. Pretendemos mostrar as possibilidades e os desafios quanto a esta forma de organização de ensino.

Embasamos na Teoria de Davydov e consolidamos o suporte teórico necessário para a realização deste experimento e fomentar as discussões do mesmo. Propomos uma pesquisa de caráter qualitativo, para tanto Bogdan e Biklen (1994, p. 16) corroboram que uma pesquisa baseada no viés qualitativo é pautada na “[...] compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação”. Desta forma, a presente pesquisa é caracterizada como uma pesquisa qualitativa evidenciando o Experimento Didático Formativo.

Assim, caracterizamos este trabalho como uma intervenção pedagógica que objetiva intervir nas ações mentais dos alunos, afim de provocar mudanças no processo cognitivo de forma a detectar o desenvolvimento dos alunos na apropriação dos conceitos. O ensino baseado na formação do pensamento teórico significa trazer aos alunos um novo nível de desenvolvimento de suas capacidades mentais, ou seja, é unir conteúdo com o desenvolvimento

mental. Numa perspectiva da formação do pensamento teórico, Davydov (1988, p. 104 tradução nossa) propõe as seguintes indicações quanto a escolha do conteúdo das matérias:

1- A assimilação dos conhecimentos de natureza geral e abstrata precede o conhecimento pelos alunos de temas mais particulares e concretos; estes últimos são deduzidos pelos próprios alunos a partir do geral e abstrato, como única base que formam.

2- Os alunos assimilam os conhecimentos que constituem um conteúdo particular ou suas partes básicas no processo de análise das condições sob as quais é originado e que os tornam essenciais.

3- Ao serem verificadas as fontes objetivas de alguns conhecimentos, os alunos devem, antes de tudo, saber como identificar no material de estudo a relação geneticamente inicial, essencial e universal, que determina o conteúdo e a estrutura do objeto destes conhecimentos.

4- Os alunos reproduzem esta relação em específicos modelos objetivas, gráficos ou de letras, que lhes permitem estudar suas propriedades em sua forma pura.

5- Os alunos devem ser capazes de concretizar a relação geneticamente inicial e universal do objeto em estudo em um sistema de conhecimentos particulares sobre ele, os quais devem manter-se em uma só unidade, que possa garantir as transições mentais do universal para o particular e vice-versa.

6- Os alunos devem saber passar da realização das ações no plano mental à sua realização no plano externo e vice-versa.

O trabalho com estas explorações no *software* GeoGebra, como as operações com números complexos e a realização de certos movimentos no plano, pode tornar o estudo significativo e repleto de sentido, abrindo caminho para aplicações, mostrando assim aos alunos que o produto de números complexos, por exemplo, pode ser reduzido a soma de dois vetores perpendiculares, como consta na proposta do experimento.

Baseados em subsídios teóricos e práticos apontados ao longo deste trabalho, acreditamos que as tarefas, quando bem organizadas nos pilares da Teoria Histórico Cultural, despertarão nos alunos o interesse sobre os números complexos e os ajudarão na compreensão e na visualização das operações. Muitas tarefas são oriundas de outras experiências e foram aproveitadas devido a suas potencialidades.

Tendo em vista esta e outras premissas tecidas ao longo deste trabalho, objetivamos organizar/estruturar tarefas que contemplassem alguns propósitos, tais como: utilidade, criatividade e que levassem os alunos a pensar. As tarefas de ensino propostas ao longo desta pesquisa objetivam desencadear a mobilização do pensamento dos alunos, em direção à construção dos conceitos teóricos.

O conhecimento teórico deve ser adquirido por meio da atividade exploratória. Na escola, essa atividade é controlada, consistindo em explorações de problemas que contêm os conflitos fundamentais do fenômeno. Um requisito para a aquisição teórica do conhecimento é a atividade de ensino construída sobre tarefas que destacam os contrastes encontrados nas relações fundamentais do fenômeno. (HEDEGAARD, 2002, p. 345-6).

Sua estrutura será constituída por dez encontros módulos, distribuídos em tarefas de construção, de resolução e de experimentação, utilizando o GeoGebra. Para o desenvolvimento das tarefas ao longo do trabalho, procuramos estabelecer como metodologia a exploração do conteúdo por meio de práticas realizadas com o auxílio dos computadores, bem como da produção escrita, por meio do “diário de campo ou de bordo”<sup>18</sup> (FIORENTINI e LORENZATO, 2009, p. 118), e tarefas de exposição oral.

Antes da realização do experimento, fizemos um acompanhamento, isto é, uma observação não participante, afim de perceber os conhecimentos prévios dos alunos, pois a tarefa de ensino precisa ocorrer com o objetivo de ampliar e aprofundar o conhecimento dos alunos. Em outras palavras, seria identificar aquilo que o próprio Vygotsky chama de Zona de Desenvolvimento Real e Proximal.

Neste sentido, afim de identificar as possíveis construções e formações do pensamento cognitivo que poderiam formar durante o experimento didático formativo, optamos também pelas entrevistas com os alunos. As entrevistas foram realizadas na Biblioteca da própria escola, com os alunos separados da turma e da professora regente da escola.

Para as observações das aulas, nós sempre estávamos acompanhados da professora da turma. Todas as informações, diálogos, relacionamentos entre aluno/professora e aluno/aluno, discussões, dentre outras ações que envolviam o professor e os alunos eram registradas em caderno próprio. Além de aspectos da organização da aula, interação professora/contéudo/aluno, materiais didáticos utilizados e aspectos motivacionais.

Todos os dados e registros analisados foram resguardados e mantidos em sigilo de forma rigorosa, ficando restritos somente aos pesquisadores, sendo usado ao longo deste trabalho nomes fictícios quando necessário a inclusão de nomes na análise de dados desta pesquisa.

---

<sup>18</sup>Este é um recurso que oportuniza a escrita a eles que raramente escrevem (GALIAZZI et. al. 2007) além de potencializar a reflexão de sua própria aprendizagem, assim como permite ao professor observar suas compreensões diante do que foi apresentado.

Heedegaard<sup>19</sup> (2002) aponta que o ensino precisa ter um movimento duplo: o professor precisa ter o conhecimento profundo dos conteúdos, para que planeje etapas de apropriação para os alunos e estes, devem investigar o conceito nuclear para chegarem aos conceitos científicos. É preciso então, fazer uma análise desse conteúdo para atingir os motivos dos alunos a partir da base principal dos mesmos, tendo no planejamento da disciplina, aspectos referentes ao Ensino Desenvolvimental.

Sobre os aspectos históricos conceituais, à medida que passamos a conhecer a história dos conceitos e como estes desenvolveram, outros novos conceitos podem surgir. Neste sentido, não basta o aluno conhecer os conceitos teóricos, é necessário que estabeleça relações entre esses conceitos e conheça sua gênese e movimento.

A gênese conceitual refere-se ao momento do nascimento. O aluno precisa superar a aparência, deve adentrar no conceito como se estivesse afim de conhecer as profundezas do mar. O lógico histórico foi aproveitado na medida em que complementava as tarefas de investigação, no intuito de dar sentido ao que os alunos faziam, bem como ampliar os seus conhecimentos.

O professor, desta forma, precisa disponibilizar um tempo suficiente para que os alunos apresentem suas conjecturas, discutam e elaborem ideias sobre o assunto estudado, concretizando o aprendizado, “É no processo de resolução da tarefa que os alunos realizam as ações e encontram a origem do nuclear dos conceitos, pois analisando e sintetizando, ascendendo do abstrato ao concreto, os conhecimentos teóricos são formados”. (PERES, 2010, p. 50).

A visão geral de uma problemática, neste caso a tarefa, é necessária para a compreensão e conseqüentemente para a solução do problema. Quando não conhecemos algo por completo, corremos frequentemente o risco de atribuir significados e conceitos de forma errônea, distorcendo assim o conceito real.

## 6.2 Aspectos Metodológicos da Pesquisa

Diversas são as pesquisas que tem interessado na questão da avaliação com foco na aprendizagem, e apontam o aluno como responsável pelo seu próprio desenvolvimento ou em grande parte, o professor como causador dos insucessos escolares.

---

<sup>19</sup>Hedegaard (2002) realizou experimento didático em escola primária da Dinamarca, com o intuito de promover a aprendizagem de conceitos teóricos pelos alunos.



Para tanto, adotamos como critérios práticos para avaliação do Experimento Didático Formativo de ensino o registro em tabelas, listas de controles, caderno de anotações, gravadores, fotografias, enfim, várias são as formas de avaliar para que possamos ter um quadro real das aprendizagens conquistadas e de todo o processo de experimentação.

Afim de conhecer mais a fundo o cenário da pesquisa, bem como os sujeitos envolvidos, utilizamos alguns instrumentos de pesquisa e de coleta de dados, como: Questionário sócio - econômico (Apêndice A); Roteiro de Entrevista para Alunos (Apêndice B); Roteiro de Entrevista para com o Professor<sup>20</sup> (Apêndice C); Tarefas de Aprendizagem e o Diário de Bordo.

Quanto aos apêndices, entendemos que a avaliação da aprendizagem da Matemática não pode ser vista somente nos limites internos da relação professor-matemática-aluno, que é estabelecida puramente na sala de aula, mas precisa contemplar o contexto histórico e social no qual a escola está inserida, aproximando então dos subsídios teóricos adotados ao longo deste trabalho.

Quanto aos critérios de observação, nos embasamos em Triviños (1987) que nos mostra que observar não se reduz a simplesmente olhar, mas sim em retirar de um amontoado de informações algo específico, destacando-o e debruçando no estudo de suas características. Daí a necessidade de termos um projeto bem estruturado, pois quando não sabemos ao certo o que desejamos pesquisar, qualquer informação se torna válida.

Segundo Gil (2006, p. 117) a entrevista é uma “[...] técnica em que o investigador se apresenta frente ao investigado e lhe formulam perguntas, com o objetivo de obtenção de dados que interessam à investigação.”, o que permite ao investigador explorar os dados com mais precisão.

Quanto ao uso de questionários, Moreira e Caleffe (2006) apontam que é um instrumento de coleta de dados muito conhecido, portanto popular, pelo fato de conter tempo, por padronizar as perguntas e ainda por deixar o respondente em anonimato.

O Apêndice D (Consentimento da participação dos alunos como sujeito de pesquisa) foi usado previamente para a realização da pesquisa com o intuito de obter o consentimento de todos dos sujeitos participantes, mediante a assinatura deste termo. No caso dos estudantes, sendo sua condição a de menoridade legal, o consentimento foi obtido junto ao pai, mãe ou representante legal. Ressaltamos que todo experimento foi desenvolvido no período das aulas.

---

<sup>20</sup> Como já mencionado ao longo do trabalho, o foco do trabalho, não é o trabalho com professores, mas somente com os alunos. Contudo, optamos ao longe deste analisar o dia a dia do professor, bem como dar voz a sua experiência.

Desta forma, todo o trabalho é referenciado em autores já descritos, baseando sempre na abordagem qualitativa de Bogdan e Biklen (1994, p. 150) que discorrem sobre a importância do pesquisador em realizar notas de campo que caracterizamos por um: “[...] relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experimenta e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”.

Para a coleta e análise de dados, seguimos ao longo deste a proposta de Bogdan e Biklen (1994) quando comparam o trabalho do pesquisador com o de zelador de um ginásio que está repleto de brinquedos espalhados. A tarefa do zelador é organizar os brinquedos, separando-os em grupos, o que na pesquisa parafraseamos como categorias.

Priorizamos ao longo deste trabalho, como categorias de análises, a questão da ZDP, aspectos de mediação, interação, conhecimento teórico.

Desta forma, a opção pela pesquisa qualitativa está relacionada ao fato desta possibilitar respostas às questões norteadoras que regem este trabalho e aos objetivos previstos nele.

Outro fator que merece destaque ao longo deste trabalho é que apesar de termos optado por determinados referenciais teóricos, o que esperamos nesta adoção não é a solução de todos os problemas da educação, mas sim que possa contribuir para uma escola mais humana e por uma Matemática mais acessível a todos,

Não há teoria que dê conta de toda a complexidade humana, e que, por melhor que sejam, as teorias trazem as marcas do seu tempo, que me propus a refletir sobre as possíveis contribuições da psicologia sócio-histórica para a educação, particularizada no processo de ensino/aprendizagem. (MOYSÉS, 2009, p. 18).

### 6.3 Os Sujeitos e o Cenário de Pesquisa

O cenário da pesquisa foi uma escola pública de uma cidade do interior do estado de Goiás, que ao longo deste trabalho, por questões éticas será denominado de Colégio Estadual Areia Dourada.

O Colégio possui alunos em sua maioria de poder aquisitivo baixo. Possui no turno matutino 5 turmas (6ºA, 7ºA, 8ºA, 9ºA e 1ºA), no turno vespertino 7 turmas (6º B, 7º B, 8º B, 9º B, 1º B, 2º A e 3º A) e no turno noturno, somente 3 turmas (1º C, 2º B e 3º B). A escola tem 254 alunos matriculados e conta com 48 profissionais, destes 21 são professores.

No período Matutino a aula inicia as 07:00 horas da manhã e quando há sexto horário termina 12:20h. No período vespertino, a aula inicia as 13:00 horas, contudo quando há sexto horário inicia 12:20 com término as 17:15.

A Escola possui um Laboratório de Informática (LIE), que conta com 18 máquinas, destas somente 15 são para uso dos alunos e apenas 10 estavam em funcionamento. O espaço físico da escola é dividido em pavilhões. No primeiro pavilhão tem a sala dos professores, coordenação, sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), sala de vídeo, Laboratório de Informática, depósito e cozinha.

No segundo pavilhão há 3 salas de aula, a secretaria escolar e a Biblioteca Nadal Sfredo. No terceiro pavilhão há 4 salas de aula, 2 banheiros (1 masculino e 1 feminino). Acima dos pavilhões há uma quadra de esportes.

Os estudantes do turno matutino residem em sua maioria na própria cidade, já os do turno vespertino em sua maioria, residem na zona rural, fazem uso do transporte escolar. E grande parte dos alunos do noturno são alunos que residem na própria cidade, mas trabalham durante o dia.

A duração de cada aula é de 50 minutos, sendo que a 3ª aula é menor, pelo fato de ser o momento de servir o lanche e recolher o vasilhame.

A escolha desta escola está ligada primeiramente ao fato de que no Município só há duas escolas que ofertam Ensino Médio, uma delas atende a modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA), modalidade esta que não é objetivo deste trabalho e a outra de ensino regular. Sendo assim, escolhemos o Colégio Estadual Areia Dourada, que oferta a modalidade de ensino regular. Outro fator característico da pesquisa também foi o fato de que a escola mostrou-se aberta à realização da pesquisa.

Também levamos em consideração para a escolha, o fato de que a instituição está localizada no município em que reside o pesquisador.

Nesta Escola, a série investigada foi a terceira série do Ensino Médio, pelo fato de o conteúdo de Números Complexos ser ensinado nesta série. Assim, pela escolha da escola e da turma a ser pesquisada, ficam também definidos os sujeitos da pesquisa: os alunos da terceira série do Ensino Médio da turma A, e a professora de Matemática da turma, cujo pseudônimo será Márcia Peres.

A turma do 3º A possui 12 alunos, destes, 7 são da zona rural, possuem em média 17 anos de idade. Apesar da maioria dos alunos residirem na zona rural com seus pais, os pais dos mesmos trabalham em fazendas de outrem, e as mães são donas de casa ou são domésticas. De

todos os pais, somente o pai de uma aluna havia concluído o Ensino Médio. Muitos alunos não moram com o pai biológico, alguns pelo pai já ter falecido, outros pela mãe ter casado novamente.

Este conhecer os alunos, é importante na medida em que se foi criando vínculos sócio-afetivos, contribuindo assim para uma liberdade maior dos mesmos para conosco e assim para interpretações amplas dos discursos dos mesmos. Vygotsky (2003) acrescenta que, os contextos socioculturais influem de forma significativa na aprendizagem, pois o processo de apropriação está sujeito as condições sócio-históricas do desenvolvimento do sujeito.

A maioria dos alunos considera a escola ‘chata’, e que só vai por que os pais obrigam e para não ficar na fazenda. Dos 12 alunos, 8 apontaram não gostar da Matemática, afirmaram que é uma disciplina muito difícil, “as contas dão mais de uma folha!”; “aquele jogo de sinal, é muito complicado...”; “não consigo aprender!”. Apesar desses relatos, em sua maioria concordam que deveriam se esforçar mais, dedicar mais, conversar menos e prestar mais atenção nas aulas, pois já estão no último ano da escola.

Para garantir o anonimato dos alunos, estes foram identificados ao longo do trabalho como A1, A2, A3 e assim por diante.

Dos 12 alunos, A1 disse gostar da escola, pois sua mãe sempre diz que se ela hoje é dona de casa, foi porque não estudou, que as amigas de sua época, quase todas trabalham fora. Isso mostra o forte poder do exemplo que a mãe dá para sua filha, de acreditar na educação como possibilidade de melhoria de vida.

Muitos reclamaram da quantidade de conteúdo que tem para estudar. Outros disseram que deveriam ter mais aulas no Laboratório de Informática.

A professora Márcia Peres, 36, é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás (UEG) de Iporá no ano de 2002. Possui especialização em Ensino de Matemática também pela UEG de Iporá.

É professora efetiva da Secretaria da Educação do Estado de Goiás, há 15 anos, ministrando atualmente aulas de Matemática e Física em algumas turmas de Ensino Fundamental e Ensino Médio com uma carga de 40 horas.

No tópico seguinte discutimos alguns aspectos relativos iniciais da pesquisa, como apresentação da proposta, conhecimento da escola-campo, conhecimento com os alunos, dentre outros fatores.

#### 6.4 Campo de Pesquisa: Trilhando Caminhos

Em setembro de 2015, apresentamos o projeto de pesquisa à comunidade escolar, explicamos todas as etapas do trabalho a ser desenvolvido e a importância deste para o desenvolvimento da educação. A professora Márcia Peres, prontificou gentilmente a colaborar com o trabalho.

A Professora Márcia disse que “se sente bem como professora de Matemática, e não se vê em outra profissão”, apesar de ser professora de física, disse, “não me vejo como professora de outra disciplina, sempre gostei de Matemática!”. Relatou ainda que,

Apesar de todas as dificuldades e cobranças que vem se colocando em cima da escola, como mudanças estruturais na educação, falta de compromisso de alunos e pais dos alunos, falta de interesse dos alunos, falta de incentivo do governo, e a falta de tempo, me sinto bem como professora.

Informou que por ter três filhas pequenas, ser casada, e ter uma quantidade de aulas semanais grande, quase não tem tempo para elaborar suas aulas de uma forma mais eficaz, e acredita que se tivesse esse tempo, suas aulas não seriam as mesmas e seus alunos com certeza aprenderiam melhor, “eu queria ter tempo pra estudar, pra dedicar, aulas diversificadas atraem mais os alunos ...”.

A professora ressalta e em sua fala que quando consegue relacionar o conteúdo com o dia a dia do aluno o aprendizado é melhor.

Diz não seguir nenhuma referência teórica em sala de aula, tem os seus métodos próprios. Confessa que, as vezes, suas aulas dão um bom resultado em outras não, mas infelizmente não tem esse tempo para preparar, “[...] sigo em grande parte o livro didático ou caderno educacional, pois os conteúdos tem que estar de acordo com a matriz curricular, mas busco exercícios na internet e em outros livros”. O que notamos é que o trabalho do professor acontece em torno do livro didático e dos conteúdos. Zabala (1998) aponta que, os livros didáticos em sua maioria, são mediatizados por interesses e os conteúdos são mostrados como rígidos e fixos. Interesses estes pautados nos vieses políticos, sociais e econômicos.

Relatou ainda que em muitas vezes simplifica o conteúdo, pois julga que os alunos não darão conta daquela parte mais aprofundada, sendo assim, enxuga o conteúdo, trabalhando somente o básico com seus alunos. Davydov (1988) discorda neste sentido, pois quando o aluno forma conceitos, ele consegue produzir generalizações e a formação de novos conceitos.

Durante as observações não-participantes percebemos que na maioria das aulas os alunos questionavam o uso do conteúdo no cotidiano, contudo a professora não soube dar respostas plausíveis, não dando significado, e assim, motivação para a realização das atividades.

A professora Márcia Peres interage muito bem com a turma, fato este evidenciado nas respostas que os alunos deram quanto às aulas de Matemática, nenhum dos alunos reclamaram da professora. Alguns alunos frequentam a escola realmente por obrigação e/ou para não trabalhar em casa, mas mesmo assim a professora abre o caderno deles e os coloca para fazer atividades. Márcia Peres, circula constantemente na sala de aula, tirando possíveis dúvidas quanto à explicação e os exercícios.

No geral as aulas seguiram a seguinte tríade: explicação, exercícios e correção. É notável o aspecto simplificado com que a professora trabalha os conteúdos, utilizando de métodos como “siga o modelo”. Ela mostra um exemplo no quadro e em seguida faz todos os exercícios com base no exemplo dado e após corrigi-los, na aula seguinte passa para outro conteúdo.

Sobre esta característica da professora de simplificar o conteúdo, acreditamos que seja pelo fato da professora se preocupar muito em seguir, concluir os conteúdos previstos nas matrizes curriculares para o referido bimestre. Característica esta que contraria com os ideais de Vygotsky, de não ser a quantidade de conteúdos que influirá na aprendizagem, mas sim na qualidade dos processos mentais que levam a construção do pensamento teórico.

Em suma, reforçamos o forte poder de implicação das políticas públicas da educação, até mesmo no ser e no fazer do professor em sala de aula.

Durante as observações e estadias no Colégio, pudemos observar acontecimentos fora da sala de aula que nos ajudaram a compor o quadro de conhecimento acerca dos atores envolvidos. Conflitos entre grupos de alunos na hora do recreio, conversas de professores sobre assuntos diversos, dentre eles citamos os de interesse desta pesquisa: desmotivação, cansaço, problemas familiares, insatisfação com as políticas públicas, estresse.

Quanto aos aspectos afetivos, os alunos mostraram sempre receptivos a nós, criou-se um clima de confiança mútua, organizavam a carteira, o local para sentarmos; além disso, pudemos desde já evidenciar aspectos ligados a relação dos alunos com a Matemática.

A seguir discorreremos sobre alguns pontos para a produção do conhecimento matemático por meio da organização do ensino, entrelaçadas pelas tarefas de estudo afim de desencadear a formação do pensamento teórico.

## 6.5 Produzindo ações e gerando conhecimento

As tarefas que compõem esta experiência de ensino foram elaboradas com o intuito de desenvolver toda a pesquisa sobre a Teoria dos Números Complexos baseada na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov.

O objetivo desta sequência de tarefa, foi de construir um material que permitisse o estudo deste conteúdo, e que contasse com a mediação pedagógica utilizando o *software* GeoGebra, pois o método deriva do conteúdo, sendo o *software* um instrumento tecnológico que bem usado possibilita a reprodução da essência do objeto. Acreditamos que o *software* mediado pelo professor é importante no desenvolvimento de estudos como esse, pois trabalha bem as características algébricas e geométricas que também são essências da Teoria dos Números Complexos.

Necessitamos para tanto elaborar um planejamento de ensino que contenha a construção do conhecimento teórico. Para tanto foi necessário que tivéssemos um amplo conhecimento das leis gerais da disciplina, para poder organizar as ações que compõem as tarefas de aprendizagem, uma vez que o pensamento teórico é formado nos escolares durante a realização dessa tarefa.

Outro elemento caracterizante na estrutura da tarefa refere-se à correspondência entre suas ações, expressa nas tarefas, nos objetivos da aprendizagem e no desejo.

Pelo exposto, fica evidenciado que a aprendizagem é um processo de apropriação de signos culturais que ajudam os indivíduos a organizar seu pensamento e suas ações, por meio do processo de internalização dos conhecimentos teórico-científicos. Os estudos de Chaiklin mostram que:

O propósito da atividade de aprendizagem é ajudar os alunos a dominar as relações, abstrações, generalizações e sínteses que caracterizam um aspecto da matéria. Este domínio é refletido na sua habilidade para fazer reflexão substantiva, análise e planejamento. A estratégia educacional básica para dar aos alunos a possibilidade para reproduzir pensamento teórico é criar tarefas instrucionais cujas soluções requeiram a formação de abstrações e generalizações sobre as idéias centrais do assunto. Esta aproximação é fundamentada na idéia de Vygotsky de internalização, ou seja, aprende-se o conteúdo da matéria aprendendo os procedimentos pelos quais se trabalha na matéria de estudo. (1999, p. 5).

Isso requer o desenvolvimento da capacidade de pensar teoricamente como os conceitos de determinada matéria foram sendo construídos.

De acordo com esse pensamento é fundamental que os alunos façam exposições de caráter problemático com o objeto a ser resolvido, pois se for dado como pronto, sua tarefa de

aprendizagem dificilmente acontece, uma vez que não realizaram nenhum trabalho de aprendizagem, ou seja, não houve apropriação de conhecimentos por falta da execução da tarefa.

Compreender as transformações, movimentos e desenvolvimento do conhecimento não é importante apenas como aumento quantitativo de informações, mas, principalmente, porque essas transições revelam, junto ao conteúdo, o método de conhecimento científico, expondo a gênese e a natureza dos conceitos, o que não ocorre com o ensino pautado no pensamento empírico, que se limita ao dado concreto. (HEDEGAARD, 2002, p. 345).

Isso reforça o que estamos discutindo neste trabalho constantemente, que organizar o ensino com a finalidade de desenvolver o pensamento teórico requer uma preparação do professor, que a maioria dos cursos de formação inicial deixa de contemplar, levando o professor a ensinar conteúdos apenas de forma empírica, isto é, reproduzindo, assim como fizeram com ele, o que segundo Davydov (1988), ajuda pouco no desenvolvimento integral dos alunos, na medida que reproduz de forma superficial os objetos e não sua essência.

Se o professor demonstra para os alunos o caminho percorrido pelo pensamento Científico, fazendo com que eles sigam o movimento dialético de construção do conhecimento, essa forma de organizar a tarefa faz com que o pensamento dos alunos se assemelhem ao raciocínio utilizado pelos estudiosos para construir os conceitos teóricos. Isso não significa dizer que os alunos estão criando novos conceitos, mas apropriando deles no processo da tarefa de aprendizagem, uma vez que eles executam ações mentais semelhantes às ações pelas quais tais conceitos foram construídos.

Essa construção autônoma do conhecimento não ocorre de maneira instantânea. Ela requer incentivo e intenso trabalho de mediação didática por parte dos professores, para que os alunos percebam o sentido da tarefa e motivem a apreender. Com isso, apropriam dos conceitos e, ao mesmo tempo, desenvolvem o pensamento teórico necessário para realizar generalizações, também teóricas.

No tópico seguinte discutimos o Experimento Didático Formativo, que será objeto de estudo ao longo deste trabalho.



## 6.6 Metodologia do Experimento Didático Formativo<sup>21</sup>

Com o intuito de relacionar teoria e prática, trabalhamos em uma turma de 12 alunos de terceiro ano do Ensino Médio, escola pública do interior do Estado de Goiás, por meio de tarefas compondo um Experimento Didático Formativo que é um método de investigação necessário para estudar a formação e o desenvolvimento dos alunos inseridos em tarefa dentro de sala de aula.

Cedro e Moura (2010, p.6) apontam que: “[...] o experimento de ensino surge como um caminho para a realização de investigações na sala de aula” (Tradução nossa). O método, assim, ocorre por meio de um caminho previamente definido tomando como base uma operação do pensamento em um determinado objeto.

Apresentamos assim, um lado objetivo e outro subjetivo. Objetivo, pelo fato de debruçar na interpretação de leis objetivas, e subjetivo na medida em que o pesquisador escolhe seus recursos de pesquisa e o que considera como transformação da realidade para obtenção de novos resultados.

O homem é um ser social e cultural, sendo assim, almejamos descobrir formas de fixação e transmissão de recursos. Sendo assim, na medida em que o sujeito apropria dos aspectos culturais, é iniciado assim o processo de hominização, o que acarreta a geração de características tipicamente humanas.

O processo de hominização ocorre na medida que, por meio da relação que o sujeito faz com o mundo e com o outro, num processo de comunicação, este apropria-se de aspectos culturais. Neste sentido, o processo de apropriação do movimento da história da humanidade ocorre somente por meio das transmissões e construções da apropriação da cultura por meio da educação. Para tanto, contemplamos a seguinte definição ao longo deste trabalho, quanto ao Experimento Didático Formativo:

[...] pode ser definida como a influência e a intervenção planejadas, adequadas ao objetivo, premeditadas, conscientes nos processos de crescimento natural do organismo. Por isso, só terá caráter educativo o estabelecimento de novas reações que, em alguma medida, intervenham nos processos de crescimento e os oriente (VYGOTSKY, 2003).

---

<sup>21</sup>Experimento didático-formativo é, também, denominado de experimento de ensino e experimento, genético-modelador.

Por ser uma prática social, todas as variáveis complexas que em muitas vezes são difíceis de serem trabalhadas em sala de aula pelo professor, para o pesquisador estas devem fazer parte do objeto de reflexão. O Experimento Didático Formativo parte das ideias de Vygotsky quanto ao método genético formativo, o genético experimental.

Vale ressaltar que apesar de ser denominado experimento, não almejamos o trabalho com métodos de isolamento de manipulação de variáveis, mas sim as organizações de ações previamente objetivadas.

Ele tem sua origem na antiga União Soviética por volta dos anos 30, tendo em suas bases o materialismo dialético de Karl Marx e na Teoria Histórico-Cultural. Contudo, com sua chegada nos anos 70, nos Estados Unidos, este passou por novas reformulações.

Este vem se constituindo como um método de investigação para estudar as mudanças no desenvolvimento cognitivo, por meio da participação do pesquisador na experimentação, tendo por objetivo principal investigar o desenvolvimento do pensamento dos alunos.

Hedegaard, aponta que,

O experimento didático é uma concretização da afirmação de Vygotsky de que o método genético formativo é um método de pesquisa necessário para investigar a formação e o desenvolvimento dos aspectos conscientes da relação dos seres humanos com o mundo”. (2002, p. 214-215)

Buscamos estudar as mudanças no processo de desenvolvimento cognitivo dos alunos, por meio da influência do pesquisador durante o experimento afim de evidenciar mudanças cognitivas de forma qualitativa. Davydov o conceitua como,

O método de experimento formativo caracteriza-se pela intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda. Neste sentido, ele difere substancialmente do experimento de verificação (constatação, comprovação) que somente enfoca o estado já formado e presente de uma formação mental. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo das formações mentais novas a serem formadas, dos meios psicológicos e pedagógicos e das vias de sua formação. Ao pesquisar os caminhos para realizar esse projeto (modelo) no processo de trabalho de aprendizagem cognitiva feito com as crianças, pode-se estudar também as condições e regularidades da origem, da gênese das novas formações mentais correspondentes. (1988, p. 196)

É imprescindível apontar que o experimento didático formativo objetiva investigar o desenvolvimento do pensamento dos alunos em conexão com a organização de ensino. Davydov (1988, p. 196) esboça que, “[...] o método genético-modelador de investigação aparece como método de educação e ensino experimentais que impulsionam o desenvolvimento”.

Hedegaard (2002) pontua que para o desenvolvimento de um experimento didático, é necessário considerar alguns aspectos, tais como: o aluno no coletivo da classe; o conteúdo relacionado às suas experiências; o conteúdo de ensino claramente relacionado, como um todo, aos temas gerais de estudo; a motivação e o interesse dos alunos desenvolvidos no conteúdo de ensino; o conhecimento integrado ao desempenho do aluno nas diferentes disciplinas; a capacidade dos alunos de modelar os conhecimentos desenvolvidos, de modo que os modelos possam tornar instrumentos para analisar a diversidade de problemas encontrados no mundo em que vivem.

Ainda sobre o experimento didático, Silva (2013, p. 107) aponta que,

[...] esse experimento se estabelece como elemento orientador da construção de nossas ações de pesquisa, uma vez que nos proporciona participar e investigar o processo de transformação da organização do ensino, através da análise objetiva dos elementos psicológicos constitutivos, em um movimento propício voltado ao desenvolvimento dos sujeitos.

O que pretendemos com o experimento didático é compreender as possíveis mudanças cognitivas dos alunos, permeadas por meio de ações e tarefas embasadas na perspectiva Histórico-Cultural e no Ensino Desenvolvimental. Para tanto, partimos do seguinte ponto, que todo espaço de aprendizagem exige uma organização de ensino, já abordada ao longo deste trabalho.

A pesquisa tem como intuito, além do simples fato de relato de experiências, ou descrição da realidade vivenciada, a busca por caminhos que levem à transformação da realidade local. Neste sentido, Moysés (2009, p.87) reflete que:

Reconhece-se a importância de se analisar o que se passa em sala de aula, especialmente na situação de ensino e aprendizagem, usando metodologias de cunho mais qualitativo. Espera-se que essas deem subsídios para a construção de conhecimentos mais relevantes sobre o universo escolar, seus atores, a produção do conhecimento, e as relações que ali se dão tanto com o macrosistema quanto no seu interior.

É por isso que a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e a Teoria do Ensino Desenvolvimental, conforme Libâneo, vêm motivando:

[...] investigadores dos campos da didática e da formação de professores convencidos da relevância da formação teórica dos professores, da necessidade de adquirirem maior efetividade no uso das instrumentalidades do trabalho docente e da importância dos contextos culturais e institucionais em que se dão o ensino e a aprendizagem. (LIBÂNEO, 2004, p. 115).

Nesse espaço de estudo, apresentamos ao grupo gestor o projeto de pesquisa, que seria desenvolvido em um determinado período de aulas, relatando a importância e os objetivos da pesquisa, bem como das tarefas escolhidas. A apresentação está baseada em referencial teórico que norteia este trabalho e a organização do ensino em forma de Experimento Didático Formativo.

Para tanto, organizamos ao longo do trabalho um conjunto de tarefas pedagógicas que foram pensadas sob a forma do Experimento Didático Formativo, direcionadas ao ensino dos Números Complexos. Por sugestão de Cedro e Moura (2010), o experimento didático formativo foi baseado na ideia do desenvolvimento de três contextos: a crítica, a descoberta e a prática social.

Para a preparação e organização das tarefas, iniciamos a partir de um estudo sobre o desenvolvimento lógico-histórico dos Números Complexos até os dias atuais e sua possível articulação por meio do GeoGebra, a fim de estabelecer relações conceituais, por meio da identificação da gênese conceitual, para a elaboração da tarefa.

A fim de caracterizar o experimento didático, Davydov (1998; 1999) apresenta alguns pontos que merecem destaque, sendo eles:

- Cada aluno deve ser considerado dentro da sua coletividade;
- A organização coletiva do trabalho;
- O conteúdo da educação precisa estar relacionado com tema geral das atividades;
- A motivação e o interesse no conteúdo precisam ser trabalhadas com os alunos;
- Desenvolver nos alunos a capacidade de análise crítica por meio das tarefas e suas conclusões.

Neste sentido, por meio desta explicação sobre os princípios que regem a organização do Experimento Didático Formativo, esperamos a partir destas explicações, que o leitor consiga apropriar de elementos basilares afins de pesquisas futuras e assim colaborar na compreensão do mesmo.

Realizadas todas as leituras dos referenciais teóricos considerados basilares para a organização do ensino e para o desenvolvimento do Experimento Didático Formativo, seguem os primeiros passos para o desenvolvimento da proposta.

## 6.7 O Experimento de Ensino

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa de identificar as contribuições e os desafios do ensino de Números Complexos, organizados com base na Teoria do Ensino

Desenvolvimental com o uso do *software* GeoGebra, foi organizado um plano de intervenção que permitiu a obtenção de dados necessários.

Sabemos que o objetivo central em vista do conteúdo Matemático é de construir, por meio das tarefas de estudo, o núcleo operacional dos números complexos, por meio da conexão entre álgebra e geometria. Desta forma, após um estudo aprofundado do assunto, o pesquisador elaborou um plano de ensino, que visa a aprendizagem dos Números Complexos.

As tarefas estão organizadas em ações de aprendizagem que facilitem a formação de conceitos pelos alunos. E toda a organização das tarefas, assim como dos momentos de aprendizagem, estão organizadas sob os pilares da Teoria do Ensino Desenvolvimental.

Outra questão contemplada nas tarefas é a História da Matemática, em especial a dos Números Complexos, apresentando a vida e obra de seus contribuintes e seus contextos sociais, políticos e econômicos na medida em que se constrói o conceito.

A história do conceito, neste caso, a história do desenvolvimento dos Números Complexos, deixa ser algo de valor simplesmente histórico para se tornar algo que possibilite novas aprendizagens, que permitam compreender o que estudam naquele momento, por meio de relações entre o novo e o velho.

A tarefa precisa ter em seu bojo o movimento lógico-histórico do conceito, de forma a possibilitar a apropriação das experiências sociais da humanidade. A história da Matemática não pode ser encarada pelos alunos e pelo próprio professor como um simples relato, esta é a história das necessidades, dos embates, dos problemas que a humanidade enfrentou e das soluções construídas com o passar dos tempos, que revela todo o processo cultural do homem na construção de conhecimentos. Sobre o movimento lógico-histórico, acreditamos que a ciência Matemática, bem como todos os conceitos atuais, são históricos e por consequência são mutáveis,

Assim, se aquele que ensina os conceitos matemáticos, entende que estes foram construídos historicamente e que nunca estarão prontos e acabados, procurará considerar, em suas aulas, o aspecto lógico-histórico destes conceitos em atividades de ensino (SOUSA, 2009, p. 84).

Neste sentido, na medida em que os escolares fazem as tarefas, a construção e a apropriação dos conceitos poderá acontecer. Visto que, a abordagem com a história da Matemática não se baseará na contagem de histórias, mas sim que os alunos reconheçam todo este processo como um resultado de muitas lutas e conquistas, sendo um produto cultural.

Revelar a Matemática como uma série de necessidades e contribuições humanas surgidas de acordo com desenvolvimento do homem, responde muitos questionamentos que alunos e até mesmo professores, que diariamente se auto questionam ao ensinar tal conteúdo.

Para a organização do ensino, o experimento foi dividido em etapas que receberão o nome ao longo deste trabalho de momentos, como sugeridas por Davydov, no qual cada momento deste é evidenciado por operações correspondentes, em que de início os alunos tiveram mais dificuldades e com o passar dos tempos, conquistaram sua própria autonomia.

No primeiro momento com os alunos, a professora Márcia Peres nos apresentou e na oportunidade apresentamos também a proposta de intervenção que almejávamos desenvolver com os mesmos. Perguntamos se os mesmos tinham interesse em participar e todos concordaram.

No primeiro contato com o Laboratório de Informática da Escola, que foi reservado dias antes a pedido da coordenação, informamos aos alunos que as tarefas iniciais, enfatizarão as ferramentas básicas disponíveis no GeoGebra. Para tanto, assim como estas e as demais tarefas realizadas durante todo o experimento, os mesmos teriam que arquivá-las em pastas disponíveis no computador e nomeá-las. Os arquivos do *software* GeoGebra deveriam ser nomeados e conter as seguintes informações: número da tarefa, nome dos integrantes e data da realização da atividade.

Abaixo segue a foto do Laboratório de Informática Educacional da escola-campo que serviu para algumas etapas para o desenvolvimento desta pesquisa.

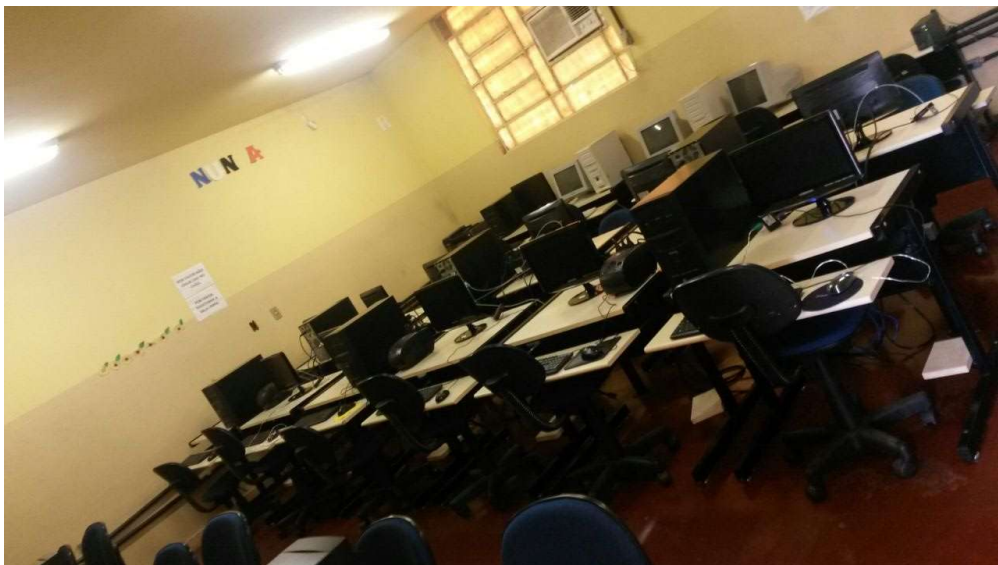


Figura 5: Foto do Laboratório de Informática da escola-campo

Com o objetivo de enriquecer o trabalho, fizemos uso de um Datashow para ilustrar algumas ferramentas importantes do *software* GeoGebra e reproduzir algumas atividades no interior da sala de aula com a participação dos alunos em cada construção.

A manipulação e a construção de objetos geométricos, a busca por conjecturas e a investigação de relações geométricas, são pontos característicos dentro das tarefas constituídas para a pesquisa.

A seguir apontamos as etapas do desenvolvimento desta proposta, caracterizadas ao longo deste trabalho por momentos, atendo-se a fatos principais e que são objetos de nosso interesse dentro desta proposta.

## 6.8 Descrição e Análise do Experimento Didático Formativo

Descreveremos e analisaremos a partir de agora alguns pontos e características marcantes da aplicação do Experimento Didático Formativo, tecendo algumas reflexões sobre a aplicação do mesmo, fazendo algumas análises das tarefas bem como dos discursos e relatórios feitos pelos alunos no diário de bordo e nas próprias tarefas à luz de nossa fundamentação teórica.

Ressaltamos ainda que de início pensamos e programamos todo o experimento para 10 aulas, distribuídas em 10 momentos, contudo não fora possível a realização desta experiência somente nestes 10 momentos, necessitamos de 15 encontros (momentos).

A aplicação do Experimento Didático Formativo se deu por meio de sequências didáticas compostas de diversas tarefas, que em sua maioria apresentavam os números complexos na sua representação geométrica no Plano Argand-Gauss, ou como ponto no plano ou como um vetor de extremidades na origem.

Inicialmente no plano de ensino, abordamos os conjuntos numéricos, em seguida o reconhecimento dos complexos na resolução de situações-problemas, operações com os números complexos, para adiante trabalharmos outros conceitos como módulo, argumento e conjugado afim de concluirmos com as aplicações, sempre destacando o viés geométrico<sup>22</sup>.

Ao final de todas as aulas ou momentos de aprendizagem, propomos aos alunos que entregassem um relatório não das atividades desenvolvidas naquele dia, mas sim expondo

---

<sup>22</sup> Não almejamos ao longo deste trabalho menosprezar o viés algébrico, contudo o que se quer é que os alunos saibam relacionar os acontecimentos no plano com os transformismos algébricos (conexão), de uma forma que resulte num ensino que tenha sentido para os alunos.

sentimentos e possíveis inquietações que não foram respondidas durante a aula no diário de bordo. As análises destes relatórios norteavam a nossa prática do dia seguinte.

#### 6.8.1 1º Momento – Motivação Externa: Filme “Vida Maria”<sup>23</sup>

A aula iniciou com um curta metragem chamado “Vida Maria”, vídeo este que retrata a dura e difícil realidade de várias Marias de diferentes gerações que acabam tendo a mesma realidade.

O vídeo retrata como o indivíduo ainda em formação internaliza os eventos e as experiências vividas na infância e como estas são determinantes para a formação de sua vida adulta. No curta foi retirado de Maria a oportunidade de brincar e de estudar. Uma das cenas mais fortes do filme, que causou um certo espanto nos alunos, foi quando a mãe a repreende por estar escrevendo, sendo obrigada a cuidar dos afazeres domésticos. Enquanto faz isso, o tempo passa, esta mesma garota casa, constitui sua própria família, tem seus filhos e o ciclo se repete, indagando sempre a mesma frase: “Não perca seu tempo, desenhando seu nome!”.

A falta de estímulo e de perspectiva de melhoria da vida de Maria implica na forma da criação de seus filhos. Esta acaba reproduzindo com seus filhos, impedindo-os de sonhar com uma vida melhor.

O filme esboça ainda um fator de suma importância, o que Davydov e o próprio Vygotsky afirmam em seus relatos, a escola é, pois, o espaço de excelência para o desenvolvimento do sujeito.

Finalizado o curta, percebemos no rosto e no olhar, de grande parte dos alunos, sentimentos como de espanto e de indignação. Damos a oportunidade para que eles falassem, contudo, mostraram-se inicialmente tímidos. Começamos então a fazer alguns questionamentos sobre o filme e a partir disso tentava relacionar com as suas vidas.

Foram levantadas algumas perguntas tais como:

O que entendeu do filme?

Qual parte/cena mais te marcou?

O que é e para que serve a escola?

O que é e para que serve a educação?

Você considera ter tido as mesmas oportunidades que seus pais?

---

<sup>23</sup> O Filme “Vida Maria” é um filme brasileiro encontrado na internet. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=zjXYg0Ta-y0>>. Acesso em: 10. out, 2015.



No decorrer das falas dos alunos, vários questionamentos foram feitos, na medida em que surgia um tema novo. Vale ressaltar que os alunos estavam bastante à vontade, o recurso das perguntas fora usado no intuito de gerar o debate e possíveis reflexões.

A1 iniciou a sua fala disse que: “Estou impressionada com as cenas, é difícil descrever ...”. A1 se mostrou bastante atento ao filme e às falas, apontando que,

[...] todas as cenas desse filme são muito fortes, mas a cena em que a mãe briga com a filha pra (sic) parar de desenhar seu próprio nome é muito triste! Eu nunca vi dentro de uma situação parecida como esta, meus pais sempre me incentivaram, e tem dias q eu fico numa preguiça de vi pra escola ... risos.

Os alunos, em sua maioria, descreveram em seus relatos (diário de bordo) e em suas falas que a cena mais forte foi a que a mãe não deixa a filha escrever seu nome.

A3, a partir do comentário anterior, disse que gostou também do filme, achou muito interessante,

É... é muito forte mesmo.... é muito estranho **ver pais que não gostam da escola** e que não se importam se os filhos estão estudando .... eu venho na escola na marra, mas meu pai fica no pé ... Graças a Deus to (sic) terminando.... risos. (grifos nosso).

O discurso de A3 reproduz sua própria fala quanto ao gostar e não gostar da escola, discurso este impregnado de significados que se fôssemos discorrer, teríamos várias páginas, todavia este não é o real objetivo deste trabalho. Nos ateremos a refletir sobre a importância da família para um bom resultado escolar.

Depois de sua fala, A3 foi questionado pelos próprios colegas sobre a importância da escola e da educação para ele. O mesmo respondeu:

Olha, tá (sic) certo que venho por causa do meu pai mais da minha mãe, mas eu sei que isso pode me ajudar .... Tem gente que estuda e se dá bem na vida outros estudam e continuam trabalhando pros (sic) outros. Mas a gente tem que fazer a parte da gente né....

A3 mostra nesta fala o que todos nós esperamos da educação, a educação sem sombra de dúvidas é uma possibilidade para um caminhar, para uma transformação de vida, não somente no sentido econômico, mas um trilhar de caminhos em prol de uma emancipação humana, cultural, social e política, que objetiva em outras palavras tornar um cidadão crítico e consciente de suas práticas. A educação é vital para a conquista do desenvolvimento econômico de um país. E apesar da brincadeira feita na frase anterior, A3 espera e acredita muito na educação.

Alguns alunos também mostraram um discurso preconceituoso se referindo às Marias como mulheres do Nordeste, frase como: “aquele povo do nordeste só sabe fazer fi (sic)...”. O filme mostra uma realidade não só do Nordeste, mais de muitos lugares do Brasil e do mundo.

Maria é como qualquer criança, que cresceu em péssimas condições, tendo um futuro igual de sua mãe. Casou, teve vários filhos. Ao final da história, já muito envelhecida e com face bastante cansada, vela o corpo de sua mãe, que muitos alunos confundiram com o do seu esposo.

Esse discurso reforça uma falsa passividade e acomodação das populações. Uma região que tanto sofre com as mazelas sociais oriunda em grande parte por condições climáticas e corrupção política. O vídeo aborda claramente outra questão, em que a mulher tem sido ferida em sua subjetividade, ficando notória o que vem acontecendo há séculos: preconceitos, estereótipos, exclusão social, indiferença. A exclusão social é marcada por uma série de fatores, mas com certeza o princípio educacional é um dos pilares que propicia tal situação. Quantas são as Marias em nossa sociedade que se dedicam nos afazeres domésticos, no cuidado com os filhos e com o marido!

Contudo, a mensagem do vídeo ficou clara de que há solução para este problema, a criação de políticas públicas que priorizem o combate às desigualdades sociais e um grande passo é promover a educação de qualidade como um direito social. O vídeo se caracteriza, sem sombra de dúvidas, como um fator motivacional externo, mas que cabe bem nesta etapa do experimento por gerar debate.

Sobre a educação, Cedro aponta que, “[...] os sujeitos, para realizarem uma atividade, no caso do desenvolvimento de uma investigação científica, precisam compreendê-la como aquilo que vai satisfazer as suas necessidades” (2010, p. 35).

Esse vídeo é muito bom na medida em que conscientiza os jovens de que eles não precisam repetir a história de seus pais, avós. Eles não podem medir esforços para transformar suas vidas.

Para a realização desta etapa do experimento, gastamos o período de uma aula, com duração de 40 minutos. Nos relatórios contidos no diário de bordo, alguns alunos apontaram a discussão sobre a importância deste vídeo para que pais, alunos e professores o vissem.

Esse vídeo deveria ser passado para alunos de outra sala também, para os professores, para os pais.... nós já estamos terminando, mas o pessoal que ainda estão atrás dá tempo de mudar muita coisa. (A2).

Apesar de ter sido necessário fazermos alguns questionamentos iniciais, para que a discussão ocorresse sobre temas que surgiam, o objetivo principal foi conquistado, fazer com que alunos do Ensino Regular pensassem em Educação e o principal, refletissem sobre a sua importância.

6.8.2 2º Momento – Primeiro contato com o *software* GeoGebra: fazendo algumas manipulações;

Optamos pela elaboração de tarefas iniciais que objetivam o manuseio do *software* GeoGebra e se prestassem a apresentar de maneira tutorial algumas das ferramentas oferecidas pelo *software* e adquirir familiaridade com o ambiente.

Elaboramos então algumas tarefas que focassem principalmente nas funções que serão utilizadas no decorrer desta proposta, afim de reconhecer a função de cada ferramenta.

Fazendo uso do Datashow, abrimos a tela principal do GeoGebra e mostramos para os alunos algumas ferramentas principais, enfatizando, é claro, as que seriam mais necessárias para o desenvolvimento da proposta. Estes acompanhavam atentamente os passos e tentavam reproduzir o que era explicado, identificando e reconhecendo assim as ferramentas do *software*.

Ao final da aula, solicitamos que os alunos escrevessem, em seu diário de bordo, suas observações feitas e conclusões, bem como as avaliações da metodologia adotada pelo professor.

Os alunos se mostraram bastante motivados com a proposta e realizaram as ações, trocavam informações, compartilhavam ações, chamavam colegas para verem o que tinha feito. De maneira geral, a motivação esteve bastante presente nas aulas. Sempre passávamos por entre as carteiras afim de verificar a realização, se estavam ou não produzindo. Expressões como: “Olha...”; “Que legal!” ou “Interessante” estavam presentes na aula.

Numa fala um dos alunos nos disse: “A escola deveria ensinar matemática assim, pois a gente consegue ‘vê’ o que acontece... economiza tempo e é mais divertido!”. A fala do mesmo reforça a importância do professor refletir constantemente sobre sua prática na busca de recursos que superem e inovem suas práticas pedagógicas.

O diário era entregue diariamente e na aula seguinte, sempre no início, discutíamos alguns fatos e expressões que mereciam destaque para o desenrolar da aula.

6.8.3 3º momento – Primeiras Impressões: tarefas de estudo

No terceiro encontro fizemos a aplicação das tarefas com uma introdução ao conceito a ser construído, neste caso o conceito de Números Complexos.

Perguntamos a eles, o que eles imaginavam ao ouvir a expressão “Números Complexo”. As respostas foram as mais variadas, se destacando algumas como: “deve ser muito difícil”, “complicados”; um aluno foi mais longe em sua resposta e disse “um enigma”.

Buscamos desta forma um diálogo bastante informal com os alunos, afim de compreender quais eram os conceitos espontâneos que eles traziam sobre os Números Complexos.

A tarefa de número 1, contemplava de maneira geral uma revisão dos conjuntos numéricos já apreendidos ou pelo menos já estudados. Ao perguntar o aluno A1 sobre quais eram os Números Naturais, ele em bom tom e com plena consciência respondeu: “Os números naturais são os normais, são os que aprendemos ...”. O relato de A1, leva-nos a percorrer os vários sentidos e significados da aprendizagem Matemática. Em seu discurso, podemos inferir que ele não distingue a diferença entre eles.

Um aluno ao qual daremos o nome de A5, caracterizado pela turma e pela própria professora como especial, disse que os números naturais são os do bingo<sup>24</sup>. Nos surpreendeu muito, pois ele prestou atenção, ficou atento aos detalhes, e concluiu de sua maneira, o que eram os números naturais, dando exemplos.

Em nossa concepção, aprender Matemática é quando o aluno consegue fazer relação em outras áreas do conhecimento e aplicar em outras situações, sejam elas matemáticas ou não.

Na tarefa de número 2, que tratava da História da Matemática, em especial sobre o problema de Cardano, 7 alunos afirmaram ser impossível resolver só com os conjuntos conhecidos, isto é, se fazia necessário algo a mais (outra informação, outro dado do problema, ou até mesmo outro conjunto numérico).

#### 6.8.4 4º Momento – Primeiras Impressões: Tarefas de Estudo

Iniciamos a aula fazendo a apresentação do *software*, ou seja, nome, como obter, onde foi inventado e as principais ferramentas. Após esta introdução, propomos que os alunos fizessem algumas manipulações afim de familiarizá-los com o ambiente do *software*.

O conjunto numérico, que ficou ausente na tarefa anterior, começou a delinear na tarefa de número 3, que abordara o reconhecimento dos números complexos (o que são) e sua localização no plano de Argand-Gauss. O objetivo desta tarefa era de reconhecer, definir os complexos familiarizando-os no plano, enfatizando relações históricas e notando quão grande fora a importância da visualização dos complexos, pois como A2 afirma: “A relação dos Números Complexos com o plano, foi um grande salto, pois os números imaginários puderam

---

<sup>24</sup> A pedido da escola, todos os alunos, professores e pais de alunos estavam vendendo bingo para colocarem ar condicionado nas salas de aula, devido ao calor. O aluno relacionou o conceito com o fato acontecido.

de fato serem vistos”. O reconhecimento e o objetivo desta tarefa foi geral, todos os alunos entenderam a proposta.

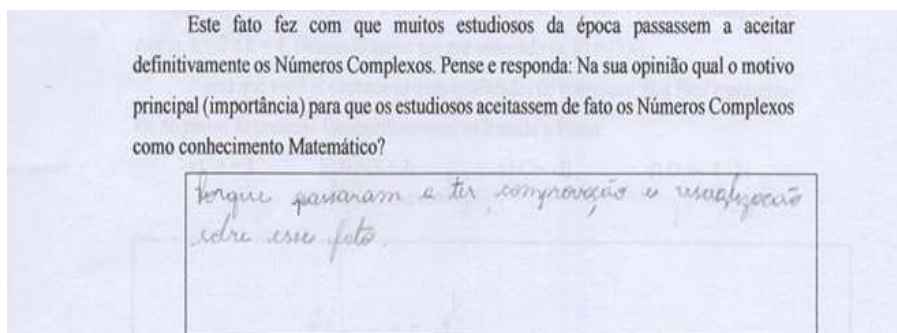


Figura 6: Tarefa realizada pelo aluno

A tarefa de número 4, contempla os Números Complexos, reconhecendo sua parte real e sua parte imaginária e encarando-os como pares ordenados, em que cada número complexo está associado a um par de números reais. E que cada par de números reais está associado a um único ponto do plano Argand-Gauss. Logo podemos associar cada número complexo  $z = a + bi$ , a um único ponto  $P$  do plano de coordenadas  $a$  e  $b$ , isto é,  $P(a, b)$ .

Nesta tarefa, a ideia é que os alunos se familiarizem com o processo de marcação dos complexos no plano (neste atividade de forma manual – lápis e caderno); Alguns alunos mostraram certas dificuldades em marcar os pontos no plano, dificuldade esta não sanada em conteúdos anteriores como Geometria Analítica, por exemplo.

A tarefa de número 5, tem o objetivo de explorar funções básicas do GeoGebra no intuito dos alunos ganharem confiança com o próprio *software* e realizando suas conjecturas e hipóteses quanto ao que o exercício pede. A tarefa pede para marcar dois complexos dados no plano e para criar outros dois e também marcá-los no plano. Em seguida, pedimos para que movimentassem um dos complexos criados até um outro vetor dado ao longo do enunciado. A aluna A3, observou que, “A medida em que se move um dos pontos, as coordenadas deste mesmo ponto se alteram... Ao colocarmos o ponto criado em cima do outro, ele passa a ter as mesmas coordenadas do outro”.

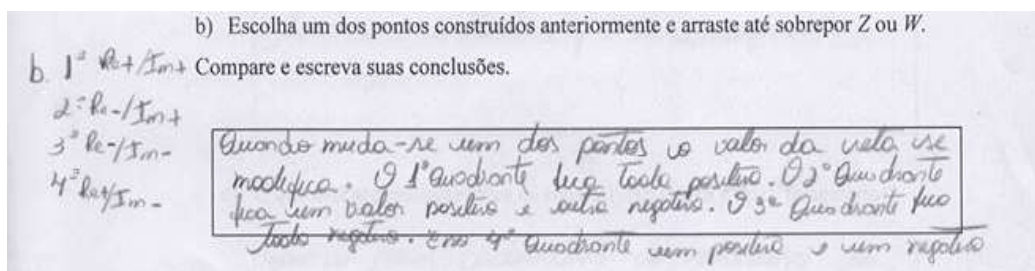


Figura 7: Tarefa realizada pelo aluno

A observação da aluna está correta, contudo o que nos chama a atenção, fora o fato da mesma não se contentar só com o que o exercício lhe pediu, mas foi além,

Se eu passo o ponto criado para o segunda quadrante, os valores mudam e parte real passa a ser negativa; se eu passo para o terceiro quadrante, tanto a parte real como a imaginária assumem um valor negativo; e no quarta quadrante, a parte real volta a ser positiva e a imaginária permanece negativa.

O interessante desta observação é que a aluna aprendeu por si só, algo que se fosse no livro didático e na folha de caderno, por não permitir movimentação, ela não perceberia. O *software* por ser dinâmico permite que o próprio aluno seja autor da sua própria prática, e que seja um pesquisador (DEMO).

#### 6.8.5 5º Momento – Primeiras Impressões: Tarefas de Estudo

A questão 6 leva os alunos a trabalharem com os complexos no plano e realizar operações de adição e de subtração no *software*. A primeira pergunta para este exercício foi: “Como poderemos somar ou subtrair, se eles apresentam parcelas de diferentes espécies?”. Orientamos a prosseguir com a atividade, e no momento certo conversaríamos. Feita a atividade o exercício pedimos para que os alunos fizessem um comentário destacando o que observaram na referida atividade. Todos os alunos depois de terem feito a soma dos números complexos, relataram e começaram a mostrar seu resultados para a turma em falas como estas: “real junta com real e imaginário com imaginário”.

O termo juntar se refere a somar, contudo durante a aula foi a palavra que ganhou destaque, desta forma preferimos mantê-la. Sobre a adição, uma outra fala característica também foi do aluno A1, que relacionou a adição de complexos com a Regra do Paralelogramo, usada no estudo das Forças em Física, tendo como vetor soma a própria resultante. Feito esse comentário, os outros também relacionaram. Estas situações legitimam e destacam a importância das premissas abordadas ao longo deste, na questão do trabalho conjunto, do compartilhamento de ideias e na própria organização do ensino.

Quanto à questão 7, objetivamos tratar a relação do número complexo com um par ordenado e tecer algumas reflexões quanto as atividade já realizadas. O interessante é que o aluno se aproprie de que dado um número complexo  $(a, b)$ ,  $P$  será um afixo do complexo dado.

### 6.8.6 6º Momento – Consolidação das operações de adição e subtração: Tarefas de Estudo

Sobre a questão 8, a mesma tinha o objetivo de reforçar a ideia da soma e da subtração de complexos tendo uma interpretação geométrica.

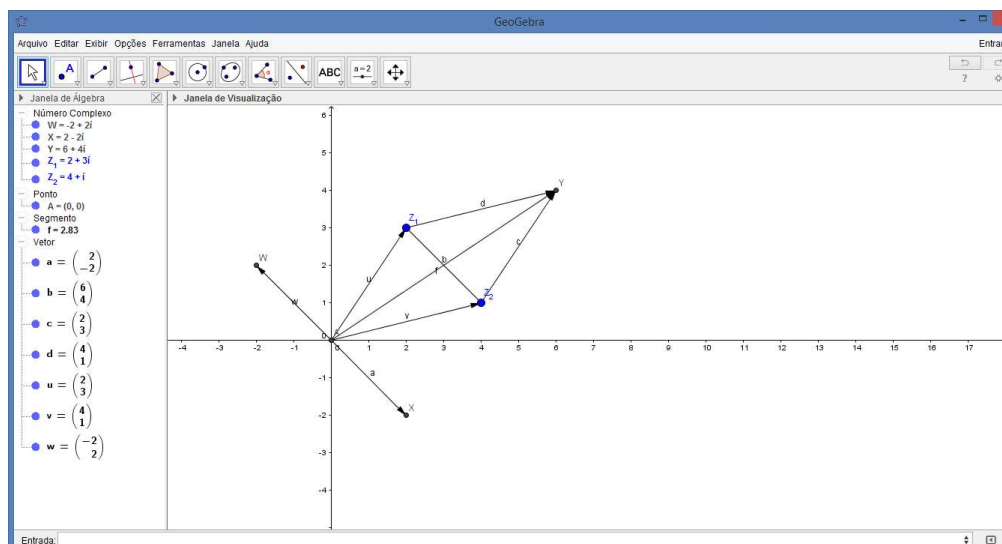


Figura 8: Tarefa realizada pelo aluno

O intuito desta é que os alunos percebessem que as operações de adição e de subtração se caracterizam em operações por partes, isto é, se soma e se subtrai parte real com real e parte imaginária com imaginária, respectivamente. Este resultado fora alcançado como mostra a imagem abaixo:

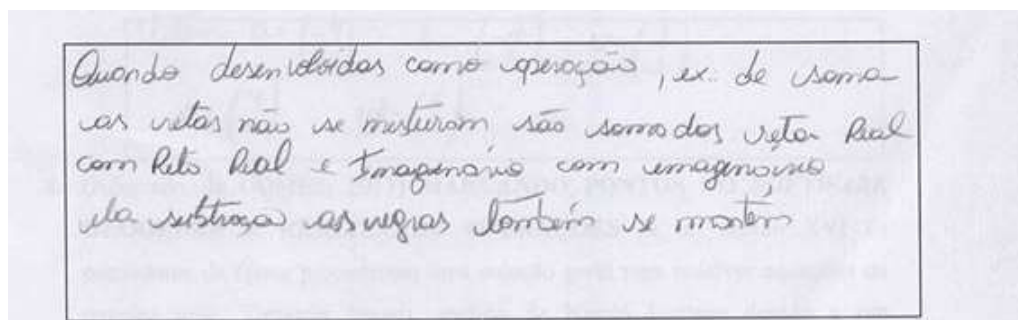


Figura 9: Tarefa realizada pelo autor

Sobre a interpretação geométrica desta tarefa, é abordada nos itens b e d, quando pedimos aos alunos que registrem suas conclusões. Dados dois complexos  $Z_1$  e  $Z_2$ , estes estão representados na forma de vetores no plano Argand-Gauss, a soma entre eles é determinada pela “regra do paralelogramo”. Isto é, pode ser representada pelo vetor de origem 0 e que coincide com a diagonal do paralelogramo definido por  $Z_1$  e  $Z_2$ . A outra diagonal deste paralelogramo está associada a diferença de  $Z_1$  e  $Z_2$ . O vetor com origem em  $Z_2$  é paralelo e tem comprimento igual ao vetor com origem em 0 e extremidade W. Para esta interpretação,

necessitaram de uma maior intervenção dos pesquisadores, pois os alunos não conseguiram notar este acontecimento, talvez pela falta de maturidade ou o próprio nível da tarefa.

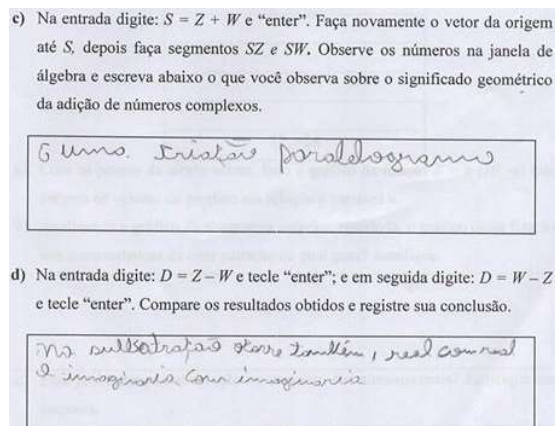


Figura 10: Tarefa realizada pelo autor

Pedimos então que os alunos calculassem as medidas do comprimento das diagonais do paralelogramo e da subtração dos respectivos vetores  $Z_1$  e  $Z_2$ . Os mesmos calcularam as medidas no próprio *software* e perceberam a relação existente citada acima, sobre a questão do tamanho.

A questão 9 é continuação da questão 2, sendo duas atividades semelhantes, seria interessante que as tivessem feito na mesma aula, contudo não fora possível. A ideia principal desta questão é que os alunos percebam que não há uma solução real para o problema. Necessitando mais uma vez de outro conjunto, assunto este abordado em questão anterior. Alguns alunos tiveram dificuldade nas operações com sinais, gerando assim erros durante a montagem do gráfico.

Além disso, a questão trabalha o reconhecimento de uma equação de segundo grau, que apesar de estarem cursando o terceiro ano do Ensino Médio, 4 alunos não conseguiram identificar, outros disseram ser uma equação do segundo grau, mas não conseguiram justificar. Apenas um aluno afirmou ser uma equação de segundo grau e justificou que como o índice do expoente maior é 2, a equação só podia ser do segundo grau. Em meio a estas dificuldades a conclusão da tarefa somente aconteceu na aula seguinte.

#### 6.8.7 7º Momento – Verificação dos resultados de Cardano: Tarefas de Estudo

No sétimo momento concluímos a tarefa de número 9, todavia as reflexões quanto a ela estão todas no item acima.



Sobre a questão 10, o intuito de ambas é sobre a reflexão da soma e da multiplicação de raízes quadradas de números negativos. Percebemos que a maioria dos alunos não tinham domínio de propriedades com operações de radicais.

Houve a necessidade explícita da atuação do pesquisador dando exemplos e contraexemplos, o que fez com que um dos alunos colocasse nas suas reflexões em seu diário de bordo o quanto era difícil para os matemáticos daquela época realizarem operações, sem as propriedades.

Realizada a intervenção pedagógica, os alunos compreenderam. Muitos expressaram em falas e expressões como: “Nossa é mesmo, eu já tinha esquecido!”; “Xiiii, nem lembrava mais...”. Estas e outras expressões foram frequentes após a intervenção que fizemos, indicando que a informação estava adormecida, em outras palavras os alunos estavam no nível de desenvolvimento potencial, na medida que precisaram da ajuda do outro para a consolidação do conceito.

#### 6.8.8 8º Momento – Operações de multiplicação com os Complexos e reconhecimento da Unidade Imaginária: Tarefas de Estudo

A tarefa de número 11 trata da multiplicação de complexos. Da multiplicação de um complexo por um número real. A ideia da atividade é que o aluno possa compreender além das simples estratégias de cálculos, mas que compreenda o significado geométrico da multiplicação.

Foi uma tarefa muito interessante, pois todos os alunos conseguiram perceber e alcançar o objetivo da atividade, que era refletir sobre os aspectos geométricos da multiplicação. Após concluir a tarefa, A1 disse: “Isso aqui é fácil... Quando se multiplica um complexo por um número real, o novo complexo se aumenta ou diminui, mas sempre fica no mesmo “sentido”, na mesma “reta””. Fizemos então duas interferências em sua fala: “Quando você estudou Geometria Analítica, como se chamavam os pontos quando estavam no mesmo sentido, na mesma reta? A turma, em sua maioria respondeu: “Eles estavam alinhados”. Complementamos: Isso mesmo, os pontos são colineares. Logo multiplicar um complexo por um real, significa obter um novo vetor que seja colinear”.

As tarefas tiveram em seu bojo o desenvolvimento e aplicação de conhecimentos anteriores, isto é, quando o aluno de fato apropria do conhecimento, ele conseguirá desenvolvê-lo.

Segunda questão: “Você disse que os pontos ora sem expandem (aumentam), ora contraem. Porque isso acontece?”. Todos os alunos nesta hora observaram a tarefa e olharam a imagem no software e concluíram, “[...] aumentam ou diminuem dependendo do número e do sinal”.

Pedimos então para observassem melhor o que viam na tela do software, foi então que A1, logo exclamou empolgado: “Achei, a resposta! Eu achei!”. O questionamos e ele disse: “Quando o número real é negativo, inverte o sentido do vetor; quando o número está entre 0 e 1, diminui o comprimento, mas o sentido continua o mesmo [...] agora se o número real foi positivo e maior que 1, o vetor expande!”.

A tarefa de número 12 reforça a multiplicação de complexo por um número real e insere ao longo de sua resolução a multiplicação de complexo por um número imaginário. O objetivo então é que o aluno perceba os processos de rotação existentes na multiplicação e também o seu significado geométrico.

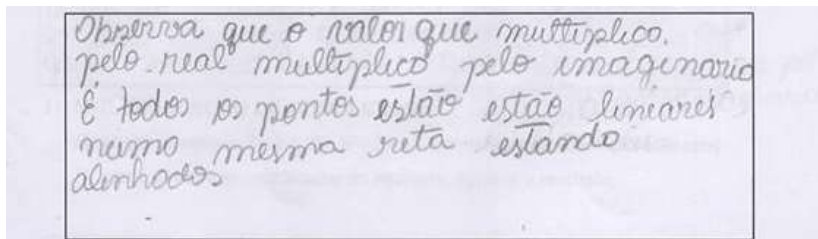


Figura 11: Tarefa realizada pelo aluno

Passeando entre as duplas de alunos, percebemos que em seus diálogos, estavam inseguros quanto às argumentações e na própria conclusão da tarefa como um todo. Senti a necessidade de uma intervenção. Para tanto, tomamos como exemplo uma experimentação bem simples: “Dado um vetor que parte da origem e tem extremo final em  $(1,0)$ .

Verifiquem o que acontece se multiplicarmos esse vetor por  $-1$ ?”.

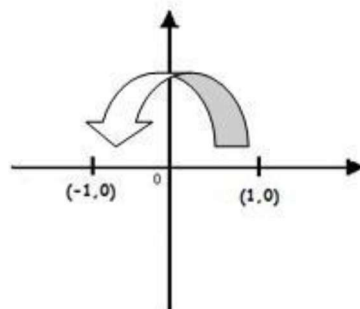


Figura 12: Rotação de  $180^\circ$  de um vetor

O desenho realizado no quadro não fora esse, contudo achamos propício na medida em que explica de fato a compreensão dos alunos. Após feito o questionamento acima, os alunos

debruçaram e concluíram que multiplicar esse vetor por  $-1$ , produz um giro de  $180^\circ$ , pois  $(1, 0) * (-1) = (-1, 0)$ , fato este representado na imagem acima. Puhl (2013, p. 2) descreve que: “Uma forma de promover a construção do verdadeiro significado de Números Complexos consiste na possibilidade de considerá-los como fatores de rotações de vetores do plano.”

Terminada a conclusão, questionamos a turma sobre o valor de  $i$  (unidade imaginária), todos disseram que vale  $\sqrt{-1}$ , então perguntamos, “pois bem, e o valor de  $i^2$ ?”. Percebemos que depois da minha fala, me olharam com um olhar de dúvida e espanto, fui no quadro e escrevi a seguinte expressão:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = ?$$

Feito isso, A4, logo disse, “ $i^2$  vale  $-1$ , basta jogar o quadrado dos dois lados e eliminar a raiz”. Finalizamos o procedimento para toda a turma e pedimos que relessem a tarefa e notassem o que aconteceu com o vetor.

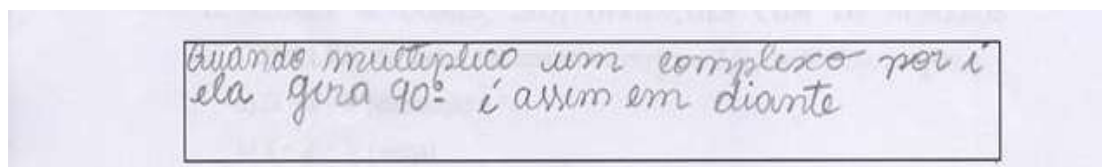


Figura 13: Tarefa realizada pelo aluno

Concluíram que ao multiplicarem um vetor dado por  $i$ , este gira  $90^\circ$  no sentido anti-horário, como mostra a figura acima.

#### 6.8.9 9º Momento – Operações de multiplicação com os Complexos e reconhecimento da Unidade Imaginária: Tarefas de Estudo

No início da aula, relembramos alguns pontos da aula anterior, dando ênfase à tarefa de número 12, relembramos o que havíamos feito e pedimos que conhecendo então o valor de  $i^1$  que é igual a  $i$  e de  $i^2$ , descobrissem o valor de  $i^0$ ,  $i^3$ ,  $i^4$ ,  $i^5$ , ... enfim, até encontrarem um padrão. Relatada suas conclusões, grande parte dos alunos notou que a partir da potência  $i^4$ , as outras vão se repetindo de 4 em 4.

Complementamos as ideias quando afirmamos que, para calcularmos a potência de  $i$  sendo expoente  $q$  inteiro positivo, basta dividirmos esse número por 4.

Exemplo:  $i^{20} = 1$ , pois 20 dividido por 4 sobra 0, e  $i$  elevado a zero é um. Daí então geramos outros exemplos que foram sugeridos por nós e pelos próprios alunos.

A tarefa de número 13 também aborda a multiplicação, só que agora a multiplicação de um número complexo por outro complexo. Além disso, pedimos que os alunos tentassem compreender o que fora feito também no papel.

Aborda ainda a multiplicação por  $i$ , só que agora para um  $i$  negativo.

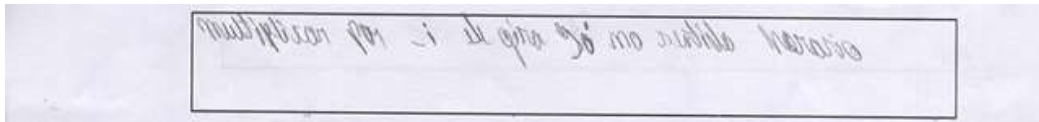


Figura 14: Tarefa realizada pelo aluno

E ainda:

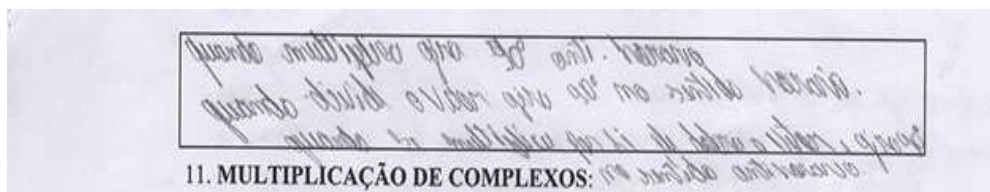


Figura 15: Tarefa realizada pelo aluno

A tarefa pedia que relatassem as semelhanças e diferenças observadas, concluíssem que assim como  $i$ , o  $-i$  faz com que o complexo dado gire  $90^\circ$ , só que ao invés de girar no sentido anti-horário como nas tarefas anteriores, gira no sentido horário.

#### 6.8.10 10º Momento – Operações de multiplicação com os Complexos e reconhecimento da Unidade Imaginária: Tarefas de Estudo

A tarefa de número 14 trabalha as 4 operações, inclusive a divisão. Afim de fixar as propriedades construídas nas aulas anteriores.

As tarefas de número 15 e 16 trabalham a unidade imaginária, no intuito que os alunos apropriassem do movimento lógico-histórico do conceito, destacando as principais propriedades por meio da movimentação dos complexos enquanto vetores no plano fazendo suas conclusões científicas, na medida em que são multiplicados por  $i$ .

As tarefas 15 e 16 trabalham a mesma proposta: multiplicação de complexos pela unidade imaginária afim de que os alunos percebam e compreendam a movimentação observada ao longo do desenvolvimento das mesmas no *software* GeoGebra.

A figura de Euler, é claro, ganha destaque nestas propostas no reconhecimento das contribuições deste para o desenvolvimento dos complexos, em especial do reconhecimento da unidade imaginária que é o foco destas tarefas.

A apreensão de significado aos poucos foi sendo construindo, a cada nova tarefa, novos conceitos, novos conhecimentos e novas inferências. Ao final da proposta, pedimos que os alunos anotassem suas conclusões, como a que segue abaixo, quanto à realização da proposta.

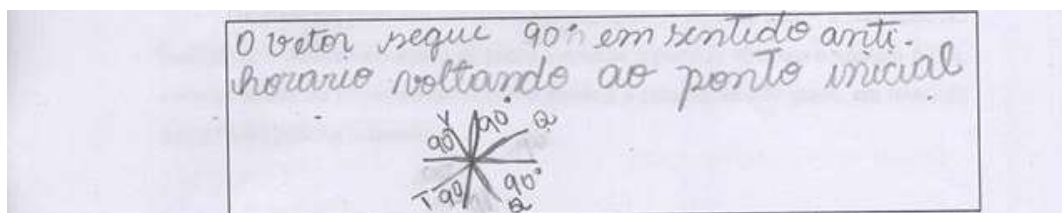


Figura 16: Tarefa realizada pelo autor

#### 6.8.11 11º Momento – Módulo e Aplicações dos Complexos: Tarefas de Estudo

A tarefa 17 demonstra uma aplicabilidade, ao se considerar os Números Complexos como vetores na Física no estudo das Forças. Os mesmos podem ser úteis se considerados vetores no intuito de determinar a força resultante por meio da soma entre os complexos (Regra do Paralelogramo).

Esta foi uma tarefa bem tranquila, alguns alunos questionaram por não se lembrarem mais do conteúdo, contudo dissemos que através dos conceitos e das propriedades que eles já haviam internalizado, eles conseguiriam realizar a proposta. Fizemos alguns questionamentos sobre aspectos relevantes tais como a definição de força, de sistema de forças e de resultante, afim de relembrá-los sobre o que haviam estudado.

A tarefa de número 18 trabalha outro conceito importante dos complexos, que é o módulo. O intuito desta tarefa é que os alunos apropriassem do conceito, reconhecendo que a distância de um ponto ou afixo até a origem do plano origina um módulo. Abordamos ainda questões relativas à unidade imaginária ( $i$ ), em que objetivamos que ao multiplicar um vetor pela unidade imaginária  $i$ , o resultado ou o novo vetor será o módulo (comprimento).

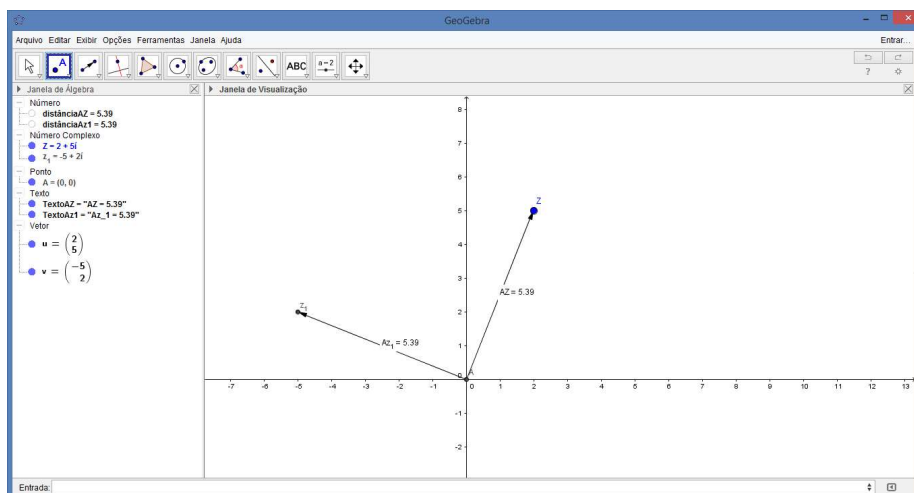


Figura 17: Tarefa realizada pelo aluno A3

Em ambas as atividades, todos os alunos realizaram sob orientação do pesquisador e chegaram às conclusões citadas acima.

#### 6.8.12 12º Momento – Argumento e Conjugado dos Complexos: Tarefas de Estudo

A tarefa de número 19 aborda o conceito de argumento, isto é, o ângulo de um determinado complexo. A ideia da tarefa é que os alunos apropriassem deste conceito, afim de aplicá-lo em situações futuras. Foi uma tarefa bastante simples, não tendo nenhum tipo de problema.

As tarefas de número 20 e 21, contemplam o conjugado de um complexo, que como sabemos é utilizado para efetuar a divisão entre números complexos e verificar propriedades no plano. Notemos que multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

Nas tarefas que evidenciavam a movimentação no plano, os alunos perceberam que ao somar ou multiplicar um complexo com o seu conjugado obteremos um novo complexo sobre o eixo real. Contudo, ao subtrairmos um complexo do seu conjugado, teremos um novo complexo sobre o eixo imaginário. Isso advém das operações algébricas que acabam por anular a parte real ou a parte imaginária.

Vale ressaltar que trabalhos como estes, que fazemos uso de recurso de aprendizagem que facilitam a visualização e a movimentação, desperta nos alunos um interesse maior, na medida que ficam encantados com o que está acontecendo a sua frente.

## 6.8.13 13º Momento – Aplicações dos Complexos na Física e na Geometria: Tarefas de Estudo

Na tarefa 22, propomos uma relação entre o conjugado e suas aplicações na Física, com ênfase na Óptica. A tarefa que segue contempla a reflexão em espelhos planos, almejando que os alunos relacionem que o raio refletido é simétrico ao incidente, da mesma forma que o complexo é simétrico ao seu conjugado. É uma tarefa bem simples, que relaciona conceitos da Física, mas que foi de fácil compreensão pelos alunos.

Na tarefa de número 23, fizemos uma aproximação entre os complexos e a geometria para o cálculo de áreas de um triângulo retângulo ABC. Nesta atividade os alunos tiveram uma certa dificuldade, pois depois do triângulo esboçado no plano, eles não sabiam quais artifícios usar para o cálculo. Sendo assim, foi necessária nossa intervenção afim de lembrá-los o cálculo da área do retângulo no quadro, levando-os a deduzir como se calcula a área do triângulo.

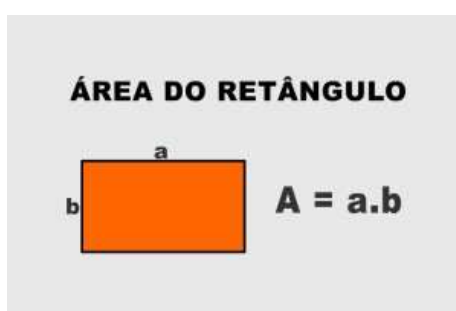


Figura 18: Área do retângulo

Relembramos o cálculo da área do triângulo retângulo, traçamos uma diagonal, gerando assim dois triângulos. A pergunta então foi: “Como calcular a área de cada triângulo?”. Grande parte dos alunos deduziram logo que, seria a metade da área do retângulo. Sendo assim,

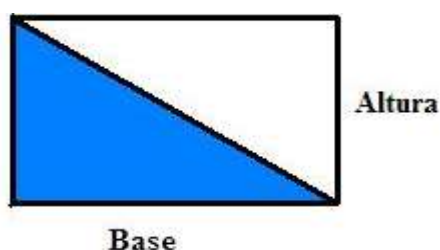


Figura 19: Retângulo com diagonal

Concluída as ideias, os alunos fizeram a tarefa e encontraram a área do triângulo dado.

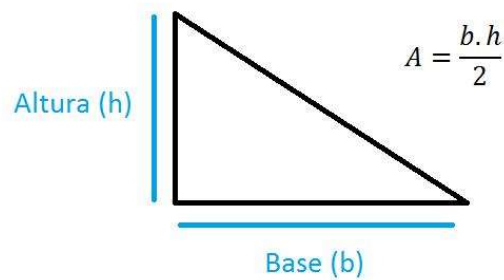


Figura 20: Área do Triângulo

#### 6.8.14 14º Momento – Aplicações na Geometria e na Engenharia Elétrica: Tarefas de Estudo

A tarefas de números 24 e 25 tratam de ângulos, portanto é recomendável que se realize ambas numa mesma aula. A primeira, por exemplo, gira em torno da seguinte pergunta, qual é a medida do ângulo do primeiro afixo no sentido anti-horário? Assim, se ele está sobre o eixo real medirá zero graus. Para descobrir, os alunos precisaram perceber que os seis pontos estão afixados em distância de arcos iguais. Sendo assim, basta dividir  $360^\circ$  por 6 (6 afixos), correspondendo a um arco de  $60^\circ$  entre um afixo e outro.

A tarefa de número 25 aborda a medida de ângulos (argumento). Os alunos, como já haviam feito o exercício anterior imaginaram, que o cálculo para a medida seria o mesmo do exercício anterior, atribuindo valores para os quatro vértices ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ ). Contudo, como sabemos, o erro precisa ser considerado como um aspecto motivador para a aprendizagem, o professor portanto, precisa encarar o erro como algo natural, para que não haja o desestímulo por parte dos educandos. Feita as orientações necessárias, perceberam que o argumento A valia  $45^\circ$ , e que já tendo o conhecimento apropriado de que o giro equivale a  $90^\circ$ , B valerá,  $135^\circ$  bem como o argumento de C vale  $225^\circ$  e o argumento de D, vale  $315^\circ$ .

Para o cálculo das distâncias entre os afixos até a origem (módulo), fizemos uso da função seno.

A tarefa de número 27, aborda a aplicação dos números complexos em circuitos de corrente alternada, exemplo disso, em instalações residenciais. As grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação apreendida na Física no ensino médio  $U = Ri$ , passa a ser  $U = Zj$ , em que  $U$  é a tensão,  $Z$  é a impedância e  $j$  é a corrente elétrica, símbolo este que os engenheiros elétricos usam como unidade imaginária na representação algébrica  $a + bj$ .



A tarefa como um todo foi formalizada de maneira bem simples, contudo uma das dificuldades da escola, que será detalhada adiante, é quanto ao ensino de Física. O professor de Física, segundo todos os alunos da sala, não domina a disciplina, logo não tem noção alguma de Física. Neste sentido, nas aplicações de física foi necessário sempre um suporte maior nosso, no intuito de sanar dúvidas e ampliar conhecimentos.

#### 6.8.15 15º Momento – Centro de Massa: Tarefas de Estudo

Sobre as a tarefas de número 27 e 28, foram deixadas para finalizar a proposta, pois abordavam o mesmo assunto, conteúdo este também da Física, que nos exigiu uma maior intervenção.

Sobre as tarefas de aplicações em outra áreas e contextualizadas, Vaz e Jesus corroboram que,

Percebemos em muitas situações que o conhecimento emerge do processo de estabelecer as relações significativas com outro conhecimento já elaborado pelo sujeito, ampliando e transformando sua estrutura conceitual. (2014, p. 60)

Destarte, acreditamos que estas tarefas possam ser uma forte possibilidade para a ampliação e formação de conceitos.

Ao final da tarefa pedimos que os alunos relatassem, como de costume, suas impressões da aula do dia e fizessem de maneira geral um relatório bem simples sobre a proposta da qual participaram. Um dos alunos em seu comentário disse a toda a sala, “[...] eu gostei muito... estudar usando o computador é muito bom, ainda mais na aula de matemática... e estudar de dupla é muito bom, pois o que você não sabe, seu colega te ajuda...”.

Grande parte dos alunos colocaram em suas falas ou em seus registros, a presença marcante do aspecto visual, isto é, da geometria, como por exemplo: “[...] tarefas desta forma, mostram o que estamos fazendo... dá pra (sic) ver, ai fica mais fácil!”. Outra fala foi que:

Assim como os matemáticos antigos, tiveram que ver pra crer, nós alunos também somos assim... muitos conteúdos a gente só faz conta, mas não tem essa visualização... não dá pra ver esse movimento....

Estas frases reforçam a importância de aulas diversificadas e da pesquisa em grupo para o desenvolvimento do raciocínio, para a formação e ampliação de conceitos e da importância de se trabalhar os entes geométricos. Quando o aluno assume a postura de participe da construção do conhecimento, passa a ver a sala de aula, o conhecimento matemático, a escola, com outros olhos.

Neste sentido, abordamos no tópico seguinte, algumas reflexões, quanto às dificuldades e desafios encontradas ao longo da realização do trabalho que merecem uma especial atenção.

## 6.9 Avaliação do Experimento Didático Formativo

A questão da formação de professores, tem sido um dos temas que mais tem rendido discussão na área da educação, derivando delas várias linhas de pesquisas e estratégias de ensino de acordo com referenciais teóricos, em diversos programas de pós-graduação.

Quando pontuamos sobre a necessidade de criarmos maneiras do conhecimento matemático estar acessível a todos, Vitorio e Damazio alertam que,

o que tem contribuído para questionamentos da presença da Matemática no currículo escolar. Como decorrência, por exemplo, pode ter se constituído em argumento para a decisão de reduzir o número de aulas semanais de Matemática, no currículo das escolas públicas (...)Por sua vez, faz o efeito contrário nas escolas da rede privada de ensino que aumentam a carga horária curricular semanal da disciplina. (2012 p. 297).

O aumento ou diminuição da carga horária de uma disciplina não é garantia de oportunidade para a aprendizagem significativa, no sentido vygotskyano. A avaliação ganha destaque neste sentido, por ser uma forma de orientar o processo ensino-aprendizagem e o papel da Matemática na escola. É processo de análise e síntese referente à atividade de ensino (do professor) e à atividade de estudo (do estudante). Desta forma, não pode ser entendida ou compreendida separadamente, na medida que a atividade de ensino do professor exerce influência na atividade de estudo do aluno e vice-versa.

Avaliar em Matemática é portanto, uma prática social que requer reflexões e estudo em busca da produção de novo sentido, significado e motivos da atividade de ensinar e aprender.

A avaliação é um processo contínuo, promovido durante as tarefas. Os critérios de avaliação nesta proposta levam em conta o envolvimento e a capacidade dos alunos em conjunto e individualmente, a desenvolverem as tarefas, propor soluções aos problemas e expressar suas experiências por meio do diário de bordo ou da fala.

Nesse conjunto de elementos, a avaliação possibilita acompanhar se o aluno está assimilando o procedimento de solução da tarefa de aprendizagem e se o resultado das ações está correspondendo ao objetivo final. Desse modo,

[...] a avaliação não consiste na simples constatação destes momentos, mas no exame qualitativo substancial do resultado da assimilação (do procedimento geral da ação e do conceito correspondente), em sua confrontação com a finalidade” (DAVÍDOV, 1988, p. 184).

Nesse contexto, a avaliação é fundamental, uma vez que informa aos escolares e aos professores como a organização do ensino tem implicado no processo de apropriação de conceitos de determinada tarefa de aprendizagem. Além de mostrar ao professor a necessidade de possíveis intervenções e alterações na organização do ensino.

A avaliação escolar é uma ação essencial para o acompanhamento do desenvolvimento dos estudantes ao possibilitar analisar a apropriação do conhecimento por parte do aluno. Sendo assim, a avaliação entendida nos critérios vygotskyanos foge dos aspectos culturais das avaliações por meio da realização de testes, no intuito de identificar o que já sabem, para aprovar ou reprová-los. E ainda realizá-las somente para o preenchimento de documentos (aspectos burocráticos).

Por ser pautada em objetivos burocráticos e imediatos, a avaliação não tem priorizado a formação de uma consciência crítica, não influenciando desta forma nem o ensino e nem a aprendizagem, dissociando assim estas duas práticas escolares. Esta forma de avaliação dá atenção somente ao conhecimento que o aluno já construiu, não dando espaço para futuras construções e avanços. Em outras palavras, podemos afirmar que permanece a lógica da resposta certa, isto é, ou o aluno sabe ou não sabe.

A avaliação segundo os critérios vygotskyanos, vai de contramão a esta ideia, ao valorizar o que a criança é capaz de realizar com a ajuda do outro, do mediador, verificando se o ensino incide a zona de desenvolvimento proximal. O desafio que temos neste tipo de trabalho é de acompanhar o processo de apropriação do conhecimento.

A avaliação, assim, possibilita que o professor avalie a aprendizagem dos seus escolares e sua prática, na medida que propicia:

[...] uma relação qualitativa entre a atividade de ensino elaborada pelo professor e a atividade de aprendizagem realizada pelos escolares. Essa perspectiva também encontra sustentação no pressuposto vigotskiano de que a mediação do professor ou do outro mais experiente, ao atuar na zona de desenvolvimento proximal do estudante, poderá promover o seu desenvolvimento. (MORAES, 2008, p. 60-61).

A Zona de Desenvolvimento Proximal aparece como um espaço de possibilidades de aprendizagens. O professor precisa, então, ser um grande observador, para que consiga detectar os avanços e as formações de pensamento cognitivo presente em seus escolares bem como precisa ser modificado na organização de ensino.

Nesse conjunto de elementos, a avaliação possibilita acompanhar se o aluno está assimilando o procedimento de solução da tarefa de aprendizagem e se o resultado das ações estão correspondendo ao objetivo final. Desse modo, “[...] a avaliação não consiste na simples constatação destes momentos, mas no exame qualitativo substancial do resultado da assimilação (do procedimento geral da ação e do conceito correspondente), em sua confrontação com a finalidade” (DAVÍDOV, 1988, p. 184).

Nesse contexto, a avaliação é fundamental, uma vez que informa aos escolares e aos professores como a organização do ensino tem implicado no processo de apropriação de conceitos de determinada tarefa de aprendizagem. Além de, mostrar ao professor a necessidade de possíveis intervenções e alterações na organização do ensino.

## 6.10 AVANÇOS E DESAFIOS

Neste tópico trataremos das dificuldades e desafios enfrentados ao longo desta pesquisa como um todo, das leituras de referenciais teóricos até a consolidação do experimento didático formativo bem como da conclusão deste.

Ressaltamos a importância deste tópico, ao embasarmos na seguinte citação,

[...] durante uma pesquisa, todos, sem exceção, passamos por diversos e diferentes obstáculos. Entretanto a superação pode ocorrer a partir de muito desejo, estudo, reflexão, persistência e trabalho. (CIVARDI, RIBEIRO e JÚNIOR, 2010, p. 15)

Em um trabalho final de conclusão de curso, seja uma monografia, um artigo científico, uma dissertação dentre outros, normalmente apresentam somente as conquistas e procedimentos consolidados, enfim, que estavam no planejamento inicial do pesquisador. Contudo, muitos omitem informações que são avaliadas como desafios e dificuldades, mas que foram importantes ou não para o processo de toda a investigação. Daí autores como os da citação acima, caracterizarem essas omissões de “bastidores”, pois raramente aparecem.

O desenvolvimento deste trabalho nos possibilitou duas abordagens metodológicas: o conhecimento teórico e a aplicação deste na prática. Moysés (2009, p. 88) argumenta neste sentido que: “[...] teoria sem prática é campo estéril”. Fazer experimentos envolve a criatividade e investigação.

O espírito de investigação ocorre somente quando, a partir do inesperado, o pesquisador em questão, aceita-o, mas aproveita disso acreditando que o novo pode salutar novos resultados que sejam de suma importância para a sua pesquisa.

Apesar de já ter tido contato com a Teoria Histórico-Cultural como já dissemos ao longo deste, uma releitura é sempre uma nova leitura, na medida em que passamos a ter a possibilidade de apropriar de outros conceitos e informações ainda não notadas e verificar outros conceitos que durante uma primeira leitura não pudemos identifica-los ou conceitua-los de maneira correta.

Nesta questão, dentre as dificuldades encontradas para a realização deste, encontramos as extensas e densas leituras de referenciais teóricos lidos ao longo deste no intuito de apropriarmos de principais conceitos. Depois de apropriados houve uma demanda de tempo para a organização do ensino, contemplando a elaboração e reelaboração das tarefas, planejamento das aulas, dentre outras ações no intuito de desenvolver um projeto que de fato contribua para o ensino-aprendizado de matemática local e que possa servir de referenciais para futuros trabalhos e ações.

No primeiro contato com as tarefas alguns alunos mostraram desinteressados, por acharem muito diferentes das que estavam acostumados, alguns chegaram a dizer que as tarefas eram muito extensas e caracterizaram-nas como diferentes quando estas exigiam deles raciocínio. Tivemos a oportunidade de presenciar aulas em que todos, estavam engajados na resolução das tarefas. O normal, seria que um ou outro estivessem conversando.

A proposta deixou de ter o caráter de “encapsulamento” visto anteriormente, dando espaço para a construção de conceitos. A professora <sup>25</sup>regente validava a importância das tarefas, pois as mesmas levavam os alunos a pensar. Segundo a professora:

Os alunos querem as coisas muito prontas, e atividades deste tipo, fazem com que eles busquem, interpretem e troquem informações (Discurso da professora Suzana Peres).

Outro aspecto que merece destaque, os alunos queriam a todo momento que nós lêssemos as questões, afirmando que as mesmas estavam um pouco extensas. De início, foram lidas as questões, contudo por seguir os passos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 26), optamos por deixar os próprios alunos realizarem suas interpretações, pois: “[...] a interpretação da tarefa deve ser, ela própria, um dos objetivos dessas aulas”.

Destacamos ainda a importância das tarefas que exigiam escrita na Matemática, atitude esta, pouco presente nas aulas de Matemática da educação básica, tanto que os próprios alunos

---

<sup>25</sup> Apesar da professora ter participado de todo o desenvolvimento do trabalho, o mesmo fora conduzido por mim, a professora esteve presente somente como ouvinte.

falavam que apesar de serem atividades de Matemática, algumas não necessitavam de cálculos para resolvê-las, pois faziam uso do pensamento e da interpretação da situação.

Observamos que, alguns alunos, em média cinco, tinham uma grande preocupação no que se refere a concursos públicos e a vestibulares, pois no momento das atividades nos questionaram se aquele tipo de atividades, eram similares às questões de vestibulares, exames do governo e concursos e no que as mesmas os ajudariam nestas provas, foi quando dissemos que no decorrer das atividades eles iriam nos responder isso, retirando suas próprias conclusões, que as atividades trabalhadas exigiam interpretação e raciocínio como a dos exames que estavam falando.

Merece destaque ainda, salientar que o simples fato de usar a história da Matemática em sala de aula, não implicará em aprendizagem, pois:

[...] O recurso à história da Matemática sozinho não soluciona todos os problemas da Educação Matemática, mas, observa-se que as atividades inspiradas na história motivam os alunos à aprendizagem, humanizam a Matemática, conduzem a investigações e contribuem para a compreensão dos conteúdos matemáticos a partir da re-criação ou da re-descoberta de conceitos. Uma abordagem histórica da construção de conceitos matemáticos pode propiciar uma visão de produção Matemática, e revela que a Matemática é um produto da cultura humana, mutável com o tempo. (VAILATI; PACHECO, s/ano, p. 23).

Durante as leituras dos relatórios, percebemos uma dificuldade muito grande na interpretação e escrita e isso geralmente impediu que, nos exercícios que exigiam interpretação e compreensão, os alunos conseguissem extrair os dados para a resolução do problema, e se não compreendiam as situações-problemas, evitavam sua resolução.

Na escrita dos relatórios, a maioria dos alunos falaram sobre a novidade de trabalhar atividades que evidenciavam a história da Matemática. Inclusive, a própria professora, em nossos momentos de conversa, ao responder o questionário e na entrevista, validou a importância de trabalhar a evolução do conceito. Em relação a isso, Moretti (2007, p. 99) esclarece que:

A história referenciada pelo autor não é só a história do objeto, sua produção e desenvolvimento, mas também a história de como a humanidade se apropriou desse objeto, ou seja, a história de seu conhecimento. [...] em particular para o ensino da Matemática, é fundamental que a história do conceito permeie a organização das ações do professor de que esse possa propor aos seus alunos problemas desencadeadores que embutem em si a essência do conceito.

A mediação aconteceu por meio de nossas falas, dos alunos, das imagens. Além de constantes interações, tais como: professor/aluno, professor/turma, alunos/alunos. Esta mediação ocorreu de duas maneiras: oral e escrita (como já dissemos, notamos a presença de

erros de ortografia, leitura e até mesmo organização de ideias, concordância, a escrita não contemplava algumas formações de pensamento expressas na oralidade e vice-versa). Percebemos ainda que a mediação baseada puramente na linguagem não é suficiente para levar o aluno à construção do conceito.

Diferente da aula tradicional, o tempo que íamos até à carteira orientando as tarefas, era muito maior do que se estivéssemos expondo o conteúdo no quadro negro para a turma. Durante as orientações nas carteiras do grupo, de forma alguma dávamos respostas, mas dávamos pistas, chamávamos atenção para outras particularidades, dávamos contra exemplos, questionávamos. Esta organização do ensino dos alunos em duplas, favoreceu o aparecimento e a expansão de novas ZDPs, por meio da interação, a possibilidade de troca. Sobre a troca de conhecimentos entre os escolares, Moysés cita que o aluno:

[...] acaba aprendendo, uma vez que tem que tem de organizar o próprio pensamento, transformando-o em palavras. Enfim, o aluno aprende porque contrapõe o seu pensamento com o do outro e, nesta contraposição, consegue perceber diferenças e semelhanças. (2009, p. 148-149).

Quando o interesse colaborativo é assumido numa sala de aula, os conflitos desaparecem. A grande preocupação dos alunos foi de resolverem a tarefa. O trabalho grupal é um campo de promoção de aprendizagem e de desenvolvimento (MOYSÉS, 2009).

A pesquisa cuja abordagem não baseia somente na literatura, propicia o desenvolvimento do fazer e do ser professor. Sousa (2009, p. 89) pontua que:

O caráter de extensão do trabalho educacional é concretizado quando a dimensão teoria e prática do ensino se estende para a comunidade escolar além da universidade, onde o ensino faz a mediação entre o conhecimento universal construído pelo homem e as novas gerações de aprendizes desses conhecimentos. O que o move para o cotidiano escolar é a intenção de construir o conhecimento do ensino que promova a formação e o desenvolvimento do homem como indivíduo histórico.

A5 quase não se pronunciava na sala, era muito tímido e lento. Na montagem dos grupos colocamos com uma garota que sempre o tratava muito bem, não fazia diferença na forma de tratamento dele para com os outros. A5 não fazia os relatórios, mas em suas observações com a colega, era notável que ele estava descobrindo um novo mundo e estava feliz por alguém acreditar nele. Moysés discorre que, “[...] quando o aluno tem alguém que sabe pô-lo para pensar, ele avança” (2009, p. 143).

As duplas, ao trocarem experiências, legitimam ou não suas convicções, erros e acertos, ocorrendo assim o processo de sistematização, desencadeando assim um ambiente

investigativo e formativo. O ser humano precisa manter essa relação com o outro, o sujeito só desenvolve os processos mentais de aprendizagem quando aprende.

O conhecimento se dá do interpessoal para o intrapessoal, do coletivo para o individual. O desenvolvimento do ser humano ocorre por intermédio das relações que tem com o outro, pelas trocas de informações, compartilhamento de ideias. A linguagem, por exemplo, propicia a internalização conceitual, uma vez que, ao falar, o aluno reformula o pensamento e reaprende o conceito estudado. A linguagem, desta forma, exerce um papel de suma importância na construção do pensamento.

Baseados nos referenciais adotados neste trabalho, o aluno deve assumir o papel de construtor do próprio conhecimento, tendo o professor como personagem de mediação entre o aluno e o conhecimento no processo de ensino-aprendizado.

Gravina e Santarosa (1998), por exemplo, relatam que muitos alunos, após os debates e discussões, voltam e refazem suas tarefas e anotações melhorando-as, ação esta denominada pelas autoras de “ajustes” de ideias, que é um sinal de aprendizagem, pois os alunos apropriaram de mais informação. Fato este que comprova a importância da mediação para a formação de conceitos (construção e reconstrução). Desta forma, quanto mais o aluno avançava na tarefa, mais ele participava dos debates e dava contribuições.

A turma era pequena e os alunos eram muito falantes. Nas aulas em que estivemos presentes na observação, era um dos pontos que mais nos chamava a atenção. Contudo, durante a realização da proposta, a sala manteve-se mais calada. Acreditamos que isso advém da forma como se deram as aulas e o desenvolvimento da proposta. Moysés (2009, p. 150) acrescenta que, “[...] verificamos que quando a colaboração passa a ser o objetivo do grupo os conflitos desaparecem”.

Por meio do ensino compartilhado (duplas), ficou notável a criação de ZDPs ou Zonas de Desenvolvimento Proximal bidirecional, facilitando assim a apropriação dos conceitos, saindo dos conceitos espontâneos e atingindo os científicos. Todas as vezes que um aluno nos chamava, fazíamos intervenções necessárias para que saíssem do potencial e avançassem para o real. Sobre esta questão Moreira (2014, p. 119) aponta que, “[...] o ensino se consuma quando aluno e professor compartilham significados.”.

No momento da realização da tarefa, os alunos já colocam em prática algumas estratégias para a resolução, e estas estratégias já constituem as hipóteses, as quais serão consolidadas ou não no término da resolução. Quando estão em duplas, todo esse conhecimento é compartilhado, há troca de informações e de opiniões constantemente. Em muitos casos um



aluno percebe algo que o seu colega não percebeu. Ao professor é dado o papel de auxiliar seus alunos na condução e resolução da tarefa,

O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta e, no final, cabe-lhe conduzir a discussão coletiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício a aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA. 1998, p. 42).

Neste momento de socialização dos resultados e das experiências, um grupo colaborava na fala dos demais de forma a complementar o raciocínio, ampliando assim os conhecimentos apropriados.

De maneira geral, os alunos ao longo das aulas se mostraram bastante receptivos, estabelecendo assim um vínculo de confiança mútua entre nós. Confiança esta adquirida graças à atuação da professora regente em sala de aula, por ter nos apresentado como ex-aluno e que todo o trabalho desenvolvido ao longo daquelas aulas se transformaria em um trabalho de dissertação, que contribuiria para trabalhos futuros, e que talvez eles próprios pudessem ler.

Dentre as dificuldades encontradas durante a aplicação do experimento, persistiram os problemas com interpretação e compreensão dos problemas-linguagem materna. Os alunos possuem uma carência muito grande de leituras acarretando assim uma má interpretação e compreensão dos problemas trabalhados em sala. Assim, de maneira geral, pontuamos abaixo as principais dificuldades encontradas:

- a) Aquisição de conceitos: por terem dificuldades em conceitos anteriores acarretando assim a retomada destes, houve um atraso no cronograma (planejamento);
- b) Dificuldades na Língua Portuguesa: muitas das tarefas da proposta exigiam interpretação e compreensão das mesmas, pois só assim retiramos os dados para a resolução do problema, todavia o que se percebia é que os alunos não compreendiam as situações-problemas, impossibilitando assim, a resolução do problema;
- c) Calendário Escolar: Para o desenvolvimento das aulas, necessitamos de quinze aulas, sendo quatro semanas. Em algumas vezes, ao chegar à escola, estavam acontecendo palestras, reuniões, ou pelo fato de outro professor não ter ido à escola, a turma foi dispensada antes do horário habitual.
- d) Frequência: a grande maioria dos alunos do turno vespertino são moradores da zona rural, daí quando o transporte escolar quebrava na estrada ou quando os mesmos faltavam aula por motivos diversos, no dia seguinte em que apareciam estavam

atrasados em relação aos demais, que compareceram à aula anterior. Com isso, o desenrolar das aulas, sofria atraso, pois não podia deixar eles atrasados ou dizer a eles que pulassem as questões, pelo fato de que se fizessem isso, não iriam compreender as ações futuras.

Outro fator que merece destaque é que, durante a preparação para o nosso quarto encontro, recebemos uma ligação da coordenadora da escola, nos informando que havia acontecido um problema no Laboratório naquela manhã e este estava impossibilitado para o uso, em outras palavras, os computadores não ligavam, ou seja, plano B em ação.

O sentimento de pânico e de desespero nos assombraram por alguns segundos, mas ainda no telefone a coordenadora da escola nos oferecia 3 notebooks da escola para que continuássemos a realização da proposta. Sendo assim, nós necessitávamos de mais 2, pois havíamos formado 6 duplas, como, agora, “quebrar o trabalho desta maneira?”.

Ao conseguirmos os outros dois notebooks ainda pela manhã, fomos à escola verificar o estado dos computadores e instalar o *software* nos mesmos. Instalado, baterias carregadas, o restante das aulas aconteceram na própria sala de aula como se pode ver pelas fotos.



Figura 21: Alguns dos alunos da escola – campo

Durante a realização do experimento, sentávamos com eles e tentávamos registrar suas falas, suas formas de interação com o outro, os meios utilizados para a resolução do problema.

É notável que aulas e tarefas pautadas em uma base teórica permitem ao professor se desprender do tecnicismo mecânico, criando juntamente com seus alunos novos caminhos que facilitem a aprendizagem.

A professora acrescentou que está disposta a novas pesquisas, reconhecendo esta como de suma importância para a formação de professores, sendo receptiva à teoria trabalhada e se oferecendo a outras propostas.

A professora regente conseguiu compreender a proposta e reconheceu que se acomodou perante os desafios da profissão, e que o educador não pode “sentar e aceitar as coisas como são, ele deve correr atrás de soluções”! Salientou também a importância de se fazer pesquisas nas escolas, como esta, dando espaço para o professor, pois se tornam uma proposta de formação, para professores que estão fora do ambiente acadêmico.

Fora isso, o ensino público está cada vez mais neutralizando a imaginação dos alunos, pois numa proposta como esta, que exigem dos alunos criatividade e descoberta, os mesmos acham difíceis, já que estão acostumados com o transformismo algébrico embutido nas aulas de Matemática.

Tarefas como as que desenvolvemos refletem em bons resultados, contudo, como exigir ou cobrar que um professor da educação básica que disponibilize uma carga horária maior que quarenta horas semanais e trabalhe os três períodos, consiga aprender a teoria e ainda aplicá-la em todas as salas de aula, já que esta necessita de um planejamento mais consistente.

Os alunos precisam ser motivados a se integrarem nas discussões, serem estimulados a interagir dentro da sala de aula. O professor pode e deve usar estratégias, instrumentos para aumentar esse estímulo, não necessariamente de algo sofisticado, mas apenas instrumentos que incitem a criatividade destes. Cabe ao professor também fazer uso dos conhecimentos espontâneos de cada aluno, propondo ações, atividades para que ocorra a transformação destes conhecimentos em conhecimentos científicos, transformar o mundo encoberto em mundo revelado, trazer descobertas ao mundo particular e social dos alunos, o professor tem grande influência em seu papel de educador na vida de seus alunos.

Mais ainda, a Universidade deve transpor seus muros, voltar os olhos para a Educação Básica, propor ações que privilegiem ou melhorem a realidade local.

O Mestrado contribuiu de forma significativa não somente na compreensão dos processos de formação do pensamento teórico, da organização de ensino, do experimento

didático formativo, e da aprendizagem da Matemática, mas também numa mudança de nosso olhar enquanto “professores-pesquisadores” em formação para um melhor entendimento da atividade humana.

Este trabalho contribui para futuros estudos relacionados ao conteúdo de Números Complexos, ao ensino-aprendizagem da Matemática, à organização de ensino, e este é nosso objetivo para as próximas pesquisas, no intuito de ampliar cada vez mais o nosso olhar enquanto professor-pesquisador em formação, quanto à importância do aluno neste processo, destacando o papel do professor como mediador do conhecimento matemático, sendo a Ciência Matemática um conhecimento cultural, que está em construção permanente.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O foco dado ao longo deste trabalho, a organização do ensino por meio da criação das tarefas, tendo por objetivo a realização do Experimento Didático Formativo, almejamos contribuir com os debates acadêmicos sobre o ensino-aprendizado da Matemática, na medida em que mostra um caminho diferente frente às constantes mudanças na sociedade atual, exigindo assim novas ações.

Refletindo sobre esses diversos fatores, destacamos a principal reflexão da pesquisa: o pensar em uma organização de ensino que suprisse ou minimizasse as dificuldades relacionadas ao ensino-aprendizagem dos Complexos, com um estudo significativo, provocando a aprendizagem do aluno. Nessas condições, a proposta foi pesquisar sobre o ensino-aprendizado desse conteúdo de forma a responder os seguintes questionamentos já citados ao longo deste trabalho, mas que merecem uma especial atenção neste momento.

Como organizar o ensino-aprendizagem dos Números Complexos por meio do Experimento Didático Formativo de Davydov?

A pesquisa encontrou resultados satisfatórios, pois quase todos os alunos conseguiram formar o pensamento teórico no conteúdo mencionado. Ao aliarmos a tecnologia e Ensino Desenvolvimental, propiciamos aos alunos uma nova forma de estudar e de aprender Matemática.

Com a análise das aulas experimentais obtivemos um resultado que apresentou um alcance de uma aprendizagem significativa para os alunos. Sendo que eles conseguiram reconhecer a evolução histórica do conceito estudado, relacionando-o ainda a outros campos. Com isso, notamos a importância do contexto histórico para construção do conhecimento qualificável para os alunos da atualidade.

Em muitas releituras em conjunto com os alunos e leituras feitas por eles, surgiam novas situações que ainda não tinham sido percebidas e também em muitas tarefas que se pretendia investigar algo, o aluno conseguiu perceber outras. A aprendizagem é um processo social e essa clareza acarreta a compreensão de que a interação entre os sujeitos envolvidos possui um caráter crucial no desenvolvimento.

As dificuldades se deram mais na deficiência de conhecimentos prévios, pois, nessa organização de ensino o saber que antecede o outro é essencial para a formação de novos conceitos. Outro ponto que merece destaque, foram as questões de faltas, grande parte ligadas ao transporte escolar, leitura e interpretação de enunciados.

Contudo, o experimento da forma como foi organizado, possibilitou o enfrentamento destas e outras problemáticas, mas com êxito, na medida em que difere do ensino tradicional, no sentido de incentivar e motivar o aluno a agir em busca de aprendizagem.

Após o término das aulas, os alunos foram entrevistados e de modo geral eles expressaram satisfação ao ter participado deste trabalho. Muitos disseram ter superado as suas expectativas, já que eles esperavam aulas tradicionais de matemática.

O ensino organizado desta forma, desencadeou algumas características positivas para esta pesquisa, tais como: O trabalho com os aspectos motivacionais das tarefas de estudo; conhecimento por completo do conceito, pelo fato da análise lógica histórica; e a formação de conceitos possibilita a participação dos alunos em debates e discussões, mesmo caso não tenha conseguido alcançar o pensamento teórico por diversos motivos.

Sobre o *software* GeoGebra, este se consolida de fato como um recurso de suma importância para o professor e iniciante na pesquisa, devido a sua estrutura didática e potencialidade pedagógica, por permitir a movimentação e visualização dos objetos matemáticos (construções não estáticas), além de relacionar de fato álgebra e geometria. O que facilita a construção do conhecimento matemático, por meio da experimentação, e do ato de conjecturar, formalizar e generalizar constituindo assim a experiência da construção do conceito pela mediação pedagógica do professor no uso do *software* GeoGebra, proporcionando uma percepção diferente da Matemática.

Ao estar concluindo mais esta etapa de nossa formação, de nossas vidas, a característica principal é a de transformação, reconhecendo assim, como pesquisadores em formação.

O Mestrado contribuiu de forma significativa não somente na busca pela compreensão de processos de ensino-aprendizagem de Matemática, mas por possibilitar mudanças, reconhecendo cada vez mais que o professor precisa ser um pesquisador e precisa a todo instante se auto avaliar, afim de transformar sua prática.

Finalmente, entendemos que, para ensinar Matemática, é necessário antes de tudo compreender que esta é uma ciência de busca de respostas, e que seu saber permite transpor os muros do senso comum e do conhecimento empírico quando gera o desenvolvimento da consciência do indivíduo. Assim sendo, neste trabalho desejamos conscientizar como o ensino de Matemática deve ser focado, de forma a considerar esta como uma ciência construída, nada mais que a tentativa do homem de entender e descrever os movimentos da vida.

Esperamos desta forma, que a nossa proposta sirva para ampliar o horizonte do conhecimento matemático, principalmente dos números complexos, numa proposta de

organização do ensino pautado no Ensino Desenvolvimental e no Experimento Didático Formativo, inter-relacionando o viés algébrico com o geométrico.

Objetivamos assim que a nossa proposta dê possibilidades de ação para demais professores que desejarem alçar voos mais altos, se tornando pesquisadores de Matemática, contribuindo assim com a formação do aluno, melhorando então a qualidade do ensino-aprendizagem de Matemática local.

Fica desta forma, o desejo de se ter desenvolvido um trabalho mais profundo com a professora Márcia Peres, na medida em que desejamos contribuir para o ensino local, contudo não fora possível trabalhar nesta premissa, pelo fato das teorias de ensino contempladas neste trabalho serem muito extensas e a falta de tempo da própria professora para os estudos e dedicação<sup>26</sup>. Sendo assim, desejamos em trabalhos futuros verificar a formação e o desenvolvimento pensamento teórico num grupo de professores, de forma a contribuir de maneira mais intensa com a qualidade do ensino-aprendizado de Matemática, dando uma capacitação para que estes apropriem das teorias.

Outra possibilidade é o desenvolvimento deste trabalho com a mesma temática em outros campos e áreas da matemática inclusive no ensino superior. Fica o desejo ainda de aprofundar em trabalhos neste campo da Matemática, visto que são poucos os trabalhos e pesquisas voltados a esta área.

Em suma, grande parte dos alunos foi capaz não só de construir conhecimento, como também de se desenvolverem do ponto de vista cognitivo. Muitas foram as evidências de apropriação do conhecimento. Em cada momento, destacamos que os referências teóricos abarcados ao longo deste trabalho podiam fornecer meios e subsídios para tornar a aprendizagem mais rica e significativa para o aluno.

---

<sup>26</sup> Reconhecemos neste trabalho sim, a importância de se trabalhar com o Professor, mas devido ao tempo curto para o estudo, desenvolvimento e aplicação do experimento, optamos por analisar a nossa própria prática como o próprio Vygotsky a fez.





## REFERÊNCIAS

BENTO, Humberto Alves. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software Geogebra**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte. 260f, 2010.

BERNARDES, Maria Eliza Mattosinho. **O Método de investigação na Psicologia Histórico-Cultural e a pesquisa sobre o psiquismo humano**. Revista Psicologia Política, v. 10, n, 20, dez, 2010, p. 297-313.

BOGDAN, Robert & BIKLEN. Nove questões freqüentes sobre a investigação Qualitativa. In: **Investigação Qualitativa em Educação: uma Introdução à Introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 3. ed. 2. reimpr. Belo horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases**. Lei nº 9. 394 / 96, de 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CALVINO, Ítalo. **Por que ler os clássicos**. Trad. de Nilson Moulin. São Paulo: Companhia das Letras, 1993, p. 9-30.

CARNEIRO, Reginaldo Fernando e PASSOS, Cármem Lucia Brancaglioni. Vivências de professores de matemática em início de carreira na utilização das tecnologias da informação e comunicação. **Zetetiké**. Cempem- FE- Unicamp. v.17, n.32, jul/dez, 2009.

CARVALHO, Djalma Pacheco de. A NOVA LEI DE DIRETRIZES E BASES E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA. **Ciência e Educação**. s/a, p. 81-90. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v5n2/a08v5n2>>. Acesso em: 08, maio, 2016.

CARVALHO, Dalmo Gomes de; LOPES, Alice Pereira Cardoso. **APRENDIZAGEM DE NÚMEROS COMPLEXOS COMO ENTES GEOMÉTRICOS**. 6p. Disponível em: < [https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjBzoq09tzMAhWEhZAKHWAjD20QFggcMAA&url=http%3A%2F%2Fexlab.unisul.br%2Fjunic%2F2009%2Farquivo.php%3Fsrc%3D2009\\_05\\_10\\_17\\_artigo\\_4aca62c2514ea.doc&usq=AFQjCNHYNJpEW8rG6CvilhqqOZliUWgIsA&bvm=bv.122129774,d.Y2I](https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjBzoq09tzMAhWEhZAKHWAjD20QFggcMAA&url=http%3A%2F%2Fexlab.unisul.br%2Fjunic%2F2009%2Farquivo.php%3Fsrc%3D2009_05_10_17_artigo_4aca62c2514ea.doc&usq=AFQjCNHYNJpEW8rG6CvilhqqOZliUWgIsA&bvm=bv.122129774,d.Y2I)>. Acesso em: 10, jan. 2016.

CHAIKLIN, Seth. Developmental teaching in upper-secondary school. In: HEDEGAARD, Mariane; LOMPSCHER, Joachim (Ed.). **Learning activity and development**. Aarhus (Dinamarca): AarhusUniversity Press, 1999.

CEDRO, Wellington Lima. OS PERCURSOS NA FORMAÇÃO DE UM PESQUISADOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: as necessidades e os motivos de investigação. In:

CIVARDI, Jaqueline Araújo; RIBEIRO, José Pedro Machado, JÚNIOR, Marcos Antônio Gonçalves. **Como nos tornamos pesquisadores?** Bastidores de pesquisas em Educação Matemática. 1. ed. Curitiba: CRV, 2010, p. 33-40.

CEDRO, Wellington de Lima; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. Experimento didático: un camino metodológico para la investigación en la educación Matemática. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 22, jun, 2010, p. 53-63.

CIVARDI, Jaqueline Araújo; RIBEIRO, José Pedro Machado, JÚNIOR, Marcos Antônio Gonçalves. Múltiplas facetas da investigação. In: \_\_\_\_\_. **Como nos tornamos pesquisadores?** Bastidores de pesquisas em Educação Matemática. 1. ed. Curitiba: CRV, 2010, p.14-20.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **EtnoMatemática**. São Paulo: Editora Ática, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004.

DAMAZIO, Ademir. **Elaboração de Conceitos Matemáticos: abordagem histórico-cultural**. 2011, 19p.

DAVYDOV, V. V. What is real learning activity? *In*: HEDEGAARD, Marianne e LOMPSHER, Joachim (eds.). **Learning activity and development**. Aarhus: Aarhus University Press, 1999. Tradução de Maria Isabel Batista Serrão e Wellington Lima Cedro.

DAVYDOV, Vasili. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscou: Progreso, 1988.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 1. ed. São Paulo: Autores Associados, 200, 129p.

DEMENECH, Flaviana; PAULA, Flávia Anastácia de. **Conceitos de cultura, desenvolvimento e aprendizado da teoria histórico-cultural: Um estudo introdutório**. 2009. 15p.

DUARTE, Newton. **Educação e Cultura**. 2012. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=xCCOfN-GXng>>. Acesso em: 10 maio. 2015.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação Matemática: pressupostos teóricos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. p. 1-56.

FREITAS, Raquel Aparecida Marra de Madeira. A cultura escolar como uma questão didática. In: LIBÂNEO, José Carlos e ALVES, Nilda (Orgs). **TEMAS DE PEDAGOGIA: Diálogos entre didática e currículo**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2012, p. 127-151.

FREITAS, Raquel A. M. da M. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de VasiliDavydov. In: LIBÂNEO, José C., SUANNO, Marilza V., LIMONTA, Sandra V. (orgs.). **Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança: diferentes olhares para a didática**. Goiânia: CEPED Publicações, 2011.

FOUREZ, Gérard. **A construção das ciências, uma introdução à filosofia e ética das ciências**. Trad. de Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: Editora Unesp, 1995, p. 179-306.

GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. **Fundamentação teórica para as perguntas primárias: o que é Matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende?** Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 176-184, maio/jun. 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. Ed. 7. reimpressão. São Paulo: Atlas, 2006.

GOUVÊA, Fernando Q; tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. **A Matemática através dos tempos- Um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. p. 1-137.

GRAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Maria Lucila. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados, **IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação**, Brasília, 1998. Disponível em:  
<[http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos\\_index.php](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos_index.php)>.

HEDEGAARD, Mariane. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. In: DANIELS, Harry (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. São Paulo: Loyola, 2002.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para todos**. 7ª série. 3. ed. São Paulo: Scipione, 2002. p.199-201.

JARROSSON, Bruno. **Humanismo e técnica: o humanismo entre economia, filosofia e ciência**. Tad. de Isabel de Almeida Brito. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 15-91.

JÚNIOR, Ulício Pinto. **A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS: “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”**. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: UFRJ / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. 6ª edição, Campinas: Papirus, 2007.

KHOL, Marta. **Vygotsky**. Disponível em: [http://www.youtube.com/watch?v=pZFu\\_ygccOo](http://www.youtube.com/watch?v=pZFu_ygccOo). Acesso em 20 maio. 2015.

LIBÂNEO, José Carlos (Universidade Católica de Goiás). **Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa: unindo ensino e modos de investigação**. In: PIMENTA, S.; ALMEIDA, M.I. (Orgs.). **Pedagogia universitária: caminhos para a formação de professores**. Campinas, SP: Cortez Editora, 2011.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. M. da M. VasilyVaislyevichDavydov: A escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Orgs.). **ENSINO DESENVOLVIMENTAL: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013, p. 315-350.

LIBÂNEO, José Carlos. Ensinar e aprender, aprender e ensinar: o lugar da teoria e da prática em didática. In: LIBÂNEO, José Carlos e ALVES, Nilda (Orgs.). **TEMAS DE PEDAGOGIA: Diálogos entre didática e currículo**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2012, p. 35-60.

LIBÂNEO, José Carlos A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Educar em Revista**, Editora UFPR, Curitiba, n. 24, p. 113–147, 2004.

LIBÂNEO, José C.; FREITAS, Raquel. A. M. M. Vygotsky, Leontiev, Davidov – Contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (Org.). **Didática e interfaces**. Rio de Janeiro-Goiânia: Descubra, 2007.

LIBÂNEO, José C.; FREITAS, Raquel. A. M. M. Vygotsky, Leontiev, Davidov – Contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (Org.). **Didática e interfaces**. Rio de Janeiro-Goiânia: Descubra, 2007, 10p.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. (Trad. Carlos Irineu da Costa). 1. ed. São Paulo: Editora 34, 2009, 264p.

LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Orgs.). **ENSINO DESENVOLVIMENTAL: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013, 378p.

LOMPSCHER, Joachim. Learning activity and its formation: ascending from the abstract to the concret. In: HEDEGAARD, Mariane; LOMPSCHER, Joachim (Ed.). **Learning activity and development**. Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press, 1999.

MARZARI, Marilene. **Ensino e aprendizagem de didática no curso de pedagogia: contribuições da teoria desenvolvimental de V. V. Davídov**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2010.

MARX, Karl. **O Capital**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1980.

MATHIAS, Carlos. **Um Olhar Humanista sobre os Números Complexos**. Disponível em: <<http://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2015/01/um-novo-olhar-sobre-os-numeros-complexos.html>>. Acesso em 20. Mar, 2015, 23p.

MATOS, Erivelto Bauer de. **ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DA EQUAÇÃO DE VAN DER WAALS**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Maria. Centro de Ciências Naturais e Exatas Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Santa Maria, RS, Brasil 2014, 71p.

MELLO, Suely A. A escola de Vygotsky. In: CARRARA, Kester (Org.). **Introdução à psicologia da educação: seis abordagens**. São Paulo: Avercamp, 2004.

MIGUEL, José Carlos. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. In: Sheila Zambello de Pinho; José Roberto Corrêa Saglietti. (Org.). **Núcleos de Ensino – PROGRAD – UNESP**. I Ed. São Paulo: Editora UNESP, 2005, v. I, p.375-394.

MIGUEL, Antônio. FIORENTINI, Dario. MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, vol. 3, nº 1, mar, 1992, p. 39-94.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e Dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Revista Zeteticus**. Ano I, n. 1, 1993, p. 19- 39.

MORAES, Sílvia Pereira Gonzaga de; MOURA, Manoel Oriosvaldo. **Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática**: contribuições da teoria histórico-cultural. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 33, 2009, p. 105-124.

MORAES, Sílvia Pereira Gonzaga. **A Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática**: contribuições da teoria histórico-cultural. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós Graduação em Educação - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2008, 260p.

MOREIRA, Herivelto. CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. Rio de Janeiro: DP&A, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria da mediação de Vygotsky. In: \_\_\_\_ **Teorias de Aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: E. P. U. 2014, p. 107-120.

MORETTI, Vanessa Dias; ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira; RIGON, Algacir Jose. **O Humano no Homem**: os pressupostos teóricos-metodológicos da Teoria Histórico- Cultural. *Psicologia & Sociedade*, 2011, 23(3), p. 477-485.

MORETTI, Vanessa Dias. **Professores de Matemática em Atividades de Ensino**: Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. (Tese de Doutorado). São Paulo, 2007. p. 78-101.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. de. **O Educador Matemático na Coletividade da Formação**: uma experiência com a escola pública. Tese (Livre Docência em Metodologia do Ensino de Matemática.), Faculdade Educação, Universidade de São Paulo, 2000.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. 9. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.176p.

OLIVEIRA, Guilherme Saramago de e BARAÚNA, Silvana Malusá. Reflexões sobre a prática pedagógica de Matemática no ensino médio. In: PUENTES, Roberto Valdés; AQUINO, Orlando Fernández e LONGAREZI, Andréa Maturano (Orgs.). **Ensino Médio**: processos, sujeitos e docência. Uberlândia: EDUFU, 2012, p. 267-289.

OLIVEIRA, M. K. **VYGOTSKY**: aprendizagem e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo: Scpione, 2005.

PEREIRA, Tháles de Lélis Martins. **O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA EM UMA ESCOLA PÚBLICA**: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. (Dissertação). Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Mestrado Profissional em Educação Matemática. Juiz de Fora. 122 fl, 2012.

PERES, Thalitta de Carvalho; FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas. **ENSINO DESENVOLVIMENTAL**: Uma alternativa para a educação Matemática. **Poiésis** –

Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado – Universidade do Sul de Santa Catarina. Unisul, Tubarão. Vol. Especial, p. 10-28, Jan/Jun, 2014.

PERES, Thalitta Fernandes de Carvalho. **VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS – UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DE V. V. DAVYDOV.**(Dissertação). Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa. Mestrado em Educação. Goiânia, 148f, 2010.

PINO, Angel S. **As marcas do humano:** as origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev S. Vigotski. São Paulo: Cortez, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; MATOS, J. M.; ABRANTES, P. **Investigação em educação matemática:** implicações curriculares. Lisboa: IIE, 1998.

PUHL, Cassiano Scott. **NÚMEROS COMPLEXOS: RUMO A UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática.** ULBRA, Canas, Rio Grande do Sul, 2013. 8p.

REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky: Uma Perspectiva Histórico-Cultural da Educação.** 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2007. 138p.

RIBEIRO, José Pedro Machado. **DA MATEMÁTICA À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:** múltiplos caminhos em meio a distintas perspectivas. In: CIVARDI, Jaqueline Araújo; RIBEIRO, José Pedro Machado, JÚNIOR, Marcos Antônio Gonçalves. **Como nos tornamos pesquisadores?** Bastidores de pesquisas em Educação Matemática. 1. ed. Curitiba: CRV, 2010, p. 21-31.

ROSA, Josélia Euzébio da; DAMAZIO, Ademir. **A PRIMEIRA TAREFA DE ESTUDO DAVYDOVIANA NA ESPECIFICIDADE DA MATEMÁTICA. XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino - UNICAMP – Campinas,** p. 25-35, 2012.

SCHEMES, Jorge. **Elaboração de conceitos:** A teoria da atividade e a elaboração de conceitos. 2007. Disponível em: < <http://jorgeschemes.blogspot.com.br/2007/05/elaborao-de-conceitos.html>>. Acesso em: 04. abr. 2013.

SILVA, A., VELOSO, E., PORFÍRIO, J., ABRANTES, P. O currículo de matemática e as Atividades de Investigação. In: ABRANTES P., PONTE, J. P., FONSECA, H., e BRUNHEIRA, L. (Orgs). **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 69-85.

SILVA, Rafael Siqueira. **Os indícios de um processo de formação: A organização do ensino no Clube de Matemática.** (Dissertação) Universidade Federal de Goiás. Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Goiânia, 213fl, 2013.

SOUSA, Maria do Carmo. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica. **Revista Bolema**. Rio Claro, SP. n. 32, 2009, p. 83-99.

SOUZA, Simone Ariomar de. Desvelando a concepção vigotskiana na relação aprendizagem e desenvolvimento: O papel do professor no processo de aquisição de conhecimentos. **CADERNOS DE EDUCAÇÃO, TECNOLOGIA E SOCIEDADE**. vol. 04, n.1, (2013) ISSN 2316-9907 DOI 10.14571/cets.v4.73-86p.

VAILATI, Janete de Souza; PACHECO, Edilson Roberto. **Usando a História da Matemática no Ensino da Álgebra**. s/ ano. 25p.

VAZ, Caroline Rodrigues; FAGUNDES, Alexandre Borges; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. **O Surgimento da Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS) na Educação: Uma Revisão**. 2009. Disponível em: <<http://ensinandoquimica.files.wordpress.com/2013/05/o-surgimento-da-cic3aancia-tecnologia-sociedade-na-educac3a7c3a3o.pdf>>. Acesso em: 16. ago. 2014.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o Geogebra. **Revista Educativa**. Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas e JESUS, Paulo Cesar Cruvinel de. Uma sequência didática para o ensino da Matemática com o software GeoGebra. **Revista Estudos**. Goiânia, v. 41, n. 1, p. 59-75, jan./mar. 2014.

VEGGETTI, Maria. S. Pensamento teórico e reflexão. A aprendizagem “majorante” de acordo com Davydov. In: Veggetti, M. S. **L'apprendimento cooperativo – concetti e contesti**. Roma: Carocci Editore, 2004.

VITÓRIO, Sônia Maria. DAMAZIO, Ademir. Avaliação do Ensino de Matemática: Uma leitura a partir da Teoria Histórico-Cultural. **Roteiro**, Joaçaba, v. 37, n. 2, jul./dez. 2012, p. 295-324.

VYGOTSKY, Lev S. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013.

\_\_\_\_\_. **Psicologia Pedagógica**. Tradução Claudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2003.









# APÊNDICES



## **APÊNDICE A - Questionário Socioeconômico**

Ministério da Educação  
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí  
Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática  
Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática

### **Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL: Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos Números complexos**

**Pesquisador: Douglas Pereira Azevedo**

**Professor Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.**

#### **ATENÇÃO:**

A veracidade das respostas e a devolução deste questionário são necessárias e indispensáveis para sua participação na pesquisa. Todos os dados obtidos neste questionário serão utilizados somente pelo pesquisador e orientador afins de análise, resguardando-se totalmente a confidencialidade da identidade dos sujeitos e sua privacidade!

**Não é necessário assinar seu nome!**

1. Sexo:  
 Masculino                       Feminino
  
2. Idade  
 15 a 17 anos     18 a 20 anos     21 a 25 anos     25 anos ou mais
  
3. Atualmente, você mora com quem?  
 Pai     Mãe     Pais     Avós     Outros Parentes
  
4. Sua residência é:  
 Própria     Alugada     Cedida     Outros
  
5. Estado civil dos seus pais  
 Casados     Viúvo     Divorciados     Solteiros     Separados
  
6. Qual o grau de escolaridade de seu pai?  
 Analfabeto

- Ensino fundamental incompleto
  - Ensino fundamental completo
  - Ensino médio completo
  - Superior incompleto
  - Superior completo
  - Mestrado ou Doutorado
  - Não sei responder
7. Qual o grau de escolaridade de sua mãe?
- Analfabeto
  - Ensino fundamental incompleto
  - Ensino fundamental completo
  - Ensino médio completo
  - Superior incompleto
  - Superior completo
  - Mestrado ou Doutorado
  - Não sei responder
8. Qual a renda mensal do seu grupo familiar?
- Até R\$ 1.576,00
  - Entre R\$ 1.577,00 e R\$ 3.152,00
  - Entre R\$ 3.153,00 e R\$ 4.728,00
  - Entre R\$ 4.729,00 e R\$ 6.304,00
  - Acima de R\$ 6.305,00
  - Não sei responder
9. Total de pessoas que residem na sua casa
- Duas
  - Três
  - Quatro
  - Cinco
  - Seis ou mais
10. Você utiliza computador com qual frequência?
- Nunca
  - Às vezes
  - Sempre
  - Não possui computador
11. Onde você costuma usar o computador?
- Em casa
  - Na escola
  - Outro: \_\_\_\_\_
  - Na Lan house
  - Não tenho acesso
12. No geral, como você classifica seus conhecimentos em informática? \*
- Ótimo
  - Bom
  - Regular
  - Ruim
13. Como você classifica seus conhecimentos em:

	Ótimo	Bom	Razoável	Pouco	Muito Pouco	Não conheço
Acesso a internet						
Editor de texto (word, writer ...)						
Planilhas (excel, calc ...)						
Apresentação de slides (power point, impress ...)						
Criação de blogs/sites/webques						
Softwares e jogos matemáticos						

14. Com que frequência o seu professor usa tecnologia em sala de aula:

( ) Nunca

( ) Sempre

( ) Às vezes

( ) Não utiliza

**Obrigado por fazer parte desta pesquisa!**





## **APÊNDICE B - Roteiro de entrevista para Alunos**

Ministério da Educação  
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí  
Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática  
Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática

### **Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL: Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos complexos**

**Pesquisador: Douglas Pereira Azevedo**

**Professor Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.**

1. Qual o significado da escola para você?
2. A que você atribui à boa aprendizagem de um aluno em matemática?
3. O que você tem a dizer sobre o modo como os professores ensinam matemática?
4. O que pensa que pode ser feito para que os alunos aprendam melhor?
5. Você se considera um aluno participativo e interessado em aprender matemática? Por quê?
6. O que você sabe à respeito dos Números Complexos?
7. Qual a importância da Matemática em sua vida?



## APÊNDICE C- Roteiro de entrevista com a Professora

Ministério da Educação  
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí  
Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática  
Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática

### Pesquisa: **ENSINO DESENVOLVIMENTAL: Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos complexos**

**Pesquisador: Douglas Pereira Azevedo**

**Professor Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.**

Experiência Profissional

Dados sobre a(s) instituição(ões) em que trabalha.

Nome da(s) Escola(s)	Esfera (estadual, municipal, etc)	CH (Carga horária semanal)	Período (matutino, vespertino, etc.)	Séries (em que leciona)
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

1. Já é professor (a) há bastante tempo?
2. Poderia falar um pouco sobre o que significa para você ser professor de Matemática?
3. Qual conteúdo de Matemática que você mais gosta de trabalhar? E o que menos gosta?
4. Como está a sua relação entre a pesquisa e o ensino de Matemática? Tem recebido notícias ou investiga novos métodos de ensino para melhorar suas aulas?
5. A que você atribui à aprendizagem de alunos de Matemática?
6. Como é seu cotidiano nas aulas de Matemática?
7. O que faz para tentar sanar ou minimizar as dificuldades dos alunos?
8. O que pensa que poderia ser feito para que os alunos aprendessem melhor?
9. O que você pensa do ensino –aprendizado dos Números Complexos no Ensino Médio?
10. E os alunos, o que demonstram sobre a aprendizagem de matemática em geral?
11. Utiliza tecnologias nas aula de Matemática?

12. Na sua formação inicial (graduação/magistério) havia alguma disciplina voltada à utilização de tecnologias na sala de aula? Se sim, como essa disciplina contribuiu para a sua prática docente

## APÊNDICE D - Consentimento da participação dos alunos como sujeito de pesquisa

Eu, \_\_\_\_\_, RG \_\_\_\_\_ abaixo assinado, concordo voluntariamente e autorizo meu (minha) filho (filha) \_\_\_\_\_ a participar desta pesquisa

como sujeito. Declaro ter sido devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo pesquisador Douglas Pereira Azevedo sobre os objetivos da pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios a que meu (minha) filho (a) está sendo submetido. Foi-me dada à oportunidade de fazer perguntas e recebi números de telefones para entrar em contato e cobrar esclarecimentos caso tenha dúvidas. Fui orientado (a) para entrar em contato com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás- Câmpus Jataí(fone:64-3632-8650), caso me sinta lesado (a) ou prejudicado (a). Fui esclarecido (a) que a participação de meu (minha) filho (a) se fará de forma anônima, e responderá perguntas ao pesquisador na forma de questionário e entrevista, e as aulas de matemática serão observadas somente para fins de análise para o desenvolvimento da pesquisa.

Em caso de danos decorrentes da pesquisa, serei ressarcido (a) pelo mestrando Douglas Pereira Azevedo, nos termos vigentes da Lei. Afirmando que aceitei meu (minha) filho (a) a participar, sem receber qualquer incentivo financeiro e sem arcar com qualquer ônus financeiro. Foi-me garantido que meu (minha) filho (a) não é obrigado (a), a participar da pesquisa e que posso desistir a qualquer momento, sem qualquer penalidade. Recebi uma cópia deste documento.

Arenópolis-Go, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2015.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do sujeito.

**Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em participar.**

Testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_



## APÊNDICE E – Tarefas de Estudo trabalhadas na escola

COLÉGIO AREIA DOURADA<sup>27</sup>

DATA: 03 de Novembro de 2015

DISCIPLINA: Matemática

TURMA: 3ª Série do Ensino Médio

PROFESSOR: Douglas Pereira Azevêdo

PROFESSOR ORIENTADOR: Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

PROFESSORA REGENTE: Márcia Peres<sup>28</sup>

### NÚMEROS COMPLEXOS

O desenvolvimento deste faz parte de um projeto de pesquisa, cujos resultados serão discutidos na dissertação intitulada ENSINO DESENVOLVIMENTAL: Um Experimento Didático Formativo para o Ensino-aprendizagem dos complexos, do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e para Matemática.

#### 1. RECONHECENDO OS CONJUNTOS NUMÉRICOS E SUA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA:

Todos os números que você conhece possuem uma representação num EIXO de existência. Mas o que é o EIXO DE EXISTÊNCIA?

O EIXO DE EXISTÊNCIA é o lugar geométrico do número. Por exemplo:

O número 4 (quatro) está localizado no Eixo de existência dos Números Reais, veja:

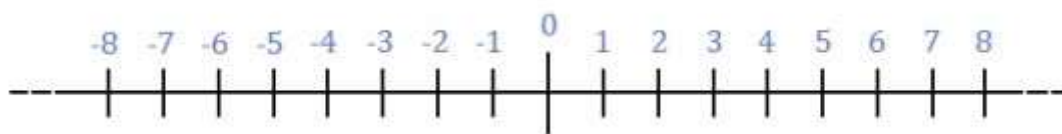


Figura 1: Eixo de Existência ou Reta numérica

Todos os números reais estão localizados no Eixo de existência real.

Os números reais englobam vários outros subconjuntos, como:

- Naturais (N):  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ;
- Inteiros (Z):  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;

<sup>27</sup> Nome fictício da escola-campo;

<sup>28</sup> Nome fictício da professora regente da escola-campo.

- Racionais (Q):  $\{-\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{5}{8}, 3\frac{5}{8}, 7, 5, -9, ..\}$
- Irracionais (I):  $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, ...\}$

Esquemáticamente tem-se a seguinte visualização:

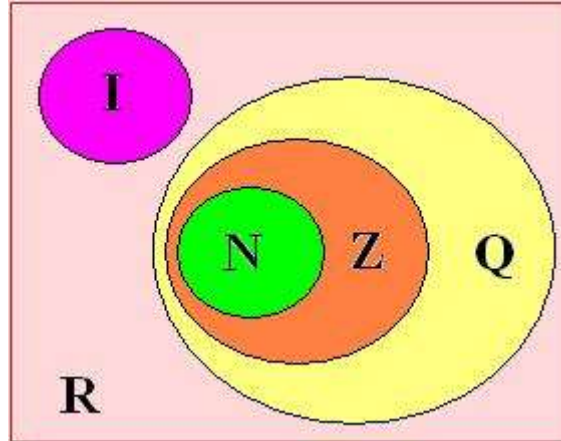


Figura 2: Representação dos Conjuntos Numéricos com exceção dos Complexos.

Com base no esquema observe que, a classe de coloração rosa, assume as características de todas as outras, as quais têm suas particularidades existentes. O conjunto dos Números Inteiros, é representado pela letra maiúscula **Z**, ele é formado pelos números inteiros negativos, positivos e o zero.

Já o conjunto dos Números Racionais é representado pela letra maiúscula **Q**, sendo formado pela reunião dos conjuntos referentes aos números naturais e inteiros, portanto o conjunto **N** (naturais) e o **Z** (inteiros) estão inclusos no conjunto **Q** (racionais). O Conjunto dos Números Irracionais é representado pela letra maiúscula **I**, é formado pelos números decimais infinitos não periódicos, ou seja, números que possui infinitas casas decimais, mas que não tem um período. Representado pela letra maiúscula **R**, compõem esse conjunto os números: naturais, inteiros, racionais e irracionais.

**Obs.:** Entre dois números inteiros existem infinitos números reais. Por exemplo:

- Entre os números 1 e 2 existem infinitos números reais:  
1,01 ; 1,001 ; 1,0001 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,5 ; 1,99 ; 1,999 ; 1,9999 ...
- Entre os números 5 e 6 existem infinitos números reais:  
5,01 ; 5,02 ; 5,05 ; 5,1 ; 5,2 ; 5,5 ; 5,99 ; 5,999 ; 5,9999 ...

Após ter relembrado um pouco sobre cada conjunto numérico e reconhecê-los como representação geométrica, responda:



a) Qual é a diferença entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos inteiros? Explique.

b) Represente geometricamente os valores abaixo e organize-os e diga se fazem ou não parte do mesmo conjunto. Caso não façam, cite o conjunto de cada um:

$$A = 5 \quad B = +3 \quad C = \frac{3}{4} \quad D = 2 \quad E = -3 \quad F = \sqrt{2}$$

c) Transcreva os valores da tabela 1 abaixo na tabela 2 em seus respectivos conjuntos numéricos:

<b>TABELA 1</b>	
-33; 12%; 0,1; 12; -159; $10^1$ ; 0; - 25; $\sqrt{100}$ ; -789 ; 0,555 ... ; -3, 012; -0,01; -0, 121212 ... ; 14; -10%; 1, 00000; -x , $\sqrt{-1}$ .	

<b>TABELA 2</b>				
NATURAIS	INTEIROS	RACIONAIS	IRRACIONAIS	REAIS

2. (Adaptado, ELI, 2014) **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.** O conceito de Números Complexos desenvolveu-se gradativamente. Algumas equações como de segundo grau e de terceiro grau não poderiam ser resolvidas, pois os números reais não eram suficientes para tanto. Já no século XVI os pensadores da época procuravam uma solução geral para resolver equações do terceiro grau. Tartaglia (gago), apelido de Nicoló Fontana devido a um ferimento na boca que provocava um defeito na fala, um italiano nascido em Brescia, conseguiu desenvolver a tão almejada fórmula. Tartaglia, um jovem matemático do século XVI encontrou a solução para as equações cúbicas e contou para Cardano, outro grande matemático da época, que jurou não revelar o segredo. Contudo, Cardano não cumpriu sua promessa e publicou a resolução em 1545, no livro *Ars Magna* com o seguinte problema: “Divida um número em duas partes, tal que a soma dessas partes seja 10 e o produto seja 40”. Pensando nisto: a) Complete a tabela abaixo, sobre o referido problema, dando valores reais para  $x$  afim de obter o seu complementar  $10 - x$  cuja soma seja igual a 10 e os produtos seja igual a 40.

SOMA = 10		FUNÇÃO $y = f(x) = x (10 - x)$ . Produto é igual a 40?
X	10 - X	$Y = x (10 - x)$
3	7	$3 * 7 = 21$ , incorreto!
4,5	5,5	$4,5 * 5,5 = 24,75$ , incorreto!
12	-2	$12 (-2) = -24$ , incorreto!

b) A que conclusão poderemos chegar?

3. **RECONHECIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO PLANO DE ARGAND-GAUSS:** Após esta “luta” surge um problema em que Cardano denominou os números usados

como “sofisticados”, ou seja as raízes quadradas de números negativos. René Descartes escreveu no seu livro *Geométrie* a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias.” Sendo assim, o número complexo é um tipo de número que possui uma parte **real** e uma outra parte **imaginária**.

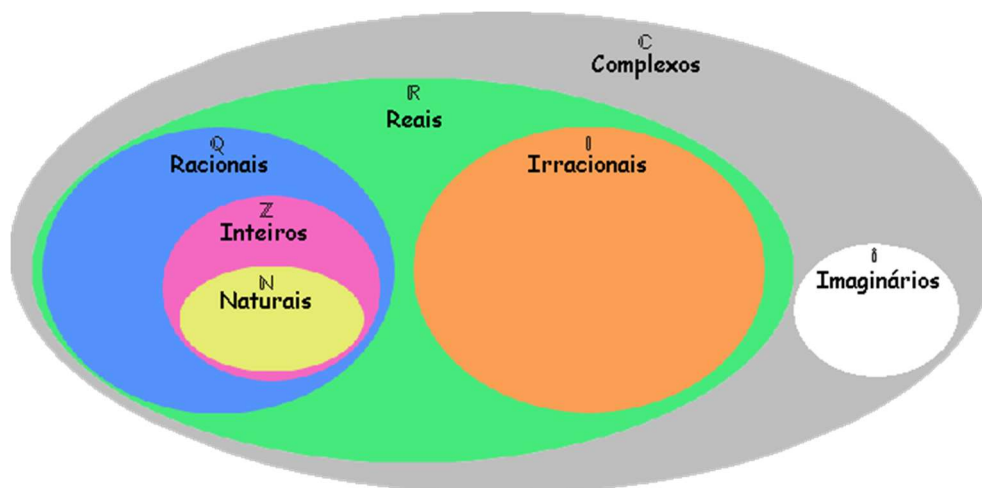


Figura 3: Representação dos Conjuntos Numéricos

Observe que todo número Real é Complexo, mas nem todo Complexo é Real.

Alguns matemáticos europeus, em particular os italianos Gerolamo Cardano e Rafael Bombelli, introduziram os números complexos na Álgebra, durante o Século XVI, quando eles assumiram a existência de raízes quadradas de números negativos, apesar de considerarem tais raízes “números impossíveis” e, assim, denominá-las “números imaginários”. Por esse motivo, até hoje perdura o nome de números imaginários quando nos referimos a raízes quadradas de números negativos.

Já no século XVIII, Gaspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss, foram os primeiros estudiosos a familiarizar, relacionar os Números Complexos com o plano. Wessel já havia constatado no ano de 1797 esta relação à muito tempo, contudo devido à falta de cuidado e zelo para com as publicações da época, Gauss ganhou a fama por ter tido um trabalho publicado no ano de 1806 e mais tarde em 1814. Argand colaborou também de forma decisiva na construção do dos Números Complexos.

Esse atraso no reconhecimento geral da realização de Wessel explica por que o plano complexo veio a ser chamado *plano de Argand-Gauss* ou *Diagrama de Argand*, em vez de *plano de Wessel*.

Este fato fez com que muitos estudiosos da época passassem a aceitar definitivamente os Números Complexos. Pense e responda: Em sua opinião qual o motivo principal (importância) para que os estudiosos aceitassem de fato os Números Complexos como conhecimento Matemático?

4. Os matemáticos costumam representar os números reais como pontos em uma reta denominada de reta real, onde cada ponto corresponde a um único número real e cada número real associa um único ponto dessa reta. Como a raiz quadrada de um número negativo não pode ser representada nessa reta, persistiu um impasse até o Século XIX.

Como era impossível associar um ponto da reta real à raiz quadrada de um número negativo, a questão foi resolvida associando-se aos números imaginários pontos sobre uma reta perpendicular à reta real, passando pelo ponto zero, e dessa forma criando um sistema parecido com o de coordenadas cartesianas. Nesse sistema, os números reais são colocados sobre o eixo horizontal, denominado *eixo real*, e todos os números imaginários sobre a reta perpendicular à reta real (eixo vertical), passando pelo zero da reta real horizontal, denominado de *eixo imaginário*. Ao se observar o plano Argand-Gauss,

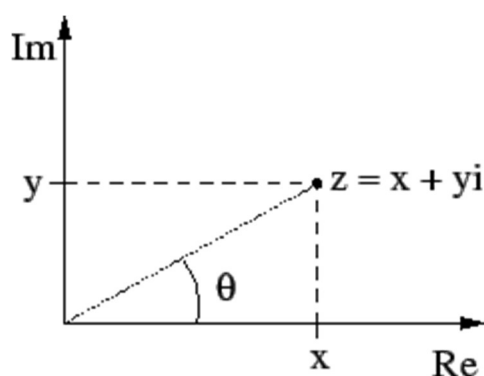


Figura 4: Plano de Argand – Gauss

Atente ainda que, além do eixo real (Re) existe um eixo imaginário (Im), definindo um local geométrico bidimensional, ou seja, de duas dimensões, um lugar geométrico plano, onde

o número será representado por duas grandezas, uma grandeza real, no eixo real, e uma imaginária, no eixo imaginário.

Observe que, um número complexo é constituído de um eixo vertical (eixo das ordenadas), que representa o lugar dos imaginários (Im) e o eixo horizontal (eixo das abscissas), que representa o lugar dos reais (Re). Diz-se que os números complexos possuem duas qualidades, uma real e uma imaginária.

No exemplo abaixo, identificaremos as partes/qualidades dos complexos, veja:

$$Z = 3 + 4i$$

Note que o sinal de +, não indica soma, pois não soma coisas distintas (real + imaginário) e sim uma complementação para a representação do complexo. No dado exemplo, a qualidade real é o 3 e a qualidade imaginária é 4 e não 4i como se imaginaria. Assim,  $a = 3$  e  $b = 4$ , formando assim um par ordenado  $(a, b) = (3, 4)$ .

Agora que você já conhece as duas qualidades do complexo, fica fácil representá-los no plano. Represente Geometricamente, utilizando o Plano:

- a)  $A = 3$       b)  $B = 3 + 2i$       c)  $C = -2i$       d)  $D = -4 - 3i$

**5. (Adaptado de GOMES, 2013) MARCANDO PONTOS NO SOFTWARE GEOGEBRA:**

O termo “Números Complexos”, só veio a surgir em 1831, intitulado também por Gauss no qual o mesmo abordava como os números complexos poderiam ser desenvolvidos, apoiados na representação do plano cartesiano. Antes de Gauss, outros estudiosos já haviam imaginado os números complexos no plano, como o suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818), todavia o pouco reconhecimento e fama fizeram com que esses matemáticos não alcançassem a merecida notoriedade da época. Em 1797 por exemplo, Gaspar Wessel trabalhou geometricamente os números complexos, fazendo uma correspondência

objetiva entre estes e os pontos do plano, mas somente foi publicada em 1806. Na entrada, marque o complexo  $Z = 1 + 3i$  e em seguida o complexo  $W = 5 + i$ .

- a) Compare as leituras dos valores dos pontos e dos números complexos.

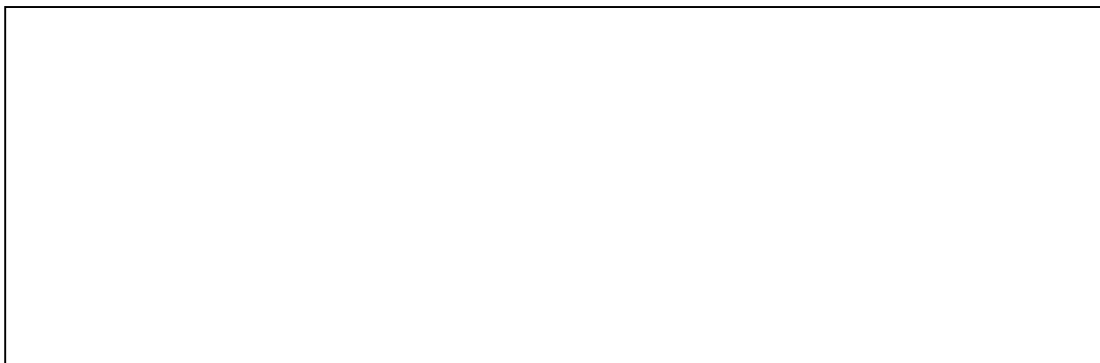


- b) Construa dois outros novos vetores e escolha um deles e arraste até sobrepor  $Z$  ou  $W$ . Compare suas conclusões com a do colega.



## 6. MARCANDO PONTOS NO *SOFTWARE* GEOGEBRA E REALIZANDO OPERAÇÕES:

- a) Dados os pontos do exercício anterior  $Z$  e  $W$ , marque – os no *software*.
- b) Em seguida, desenvolva operações, de soma e subtração entre eles. Por fim escreva abaixo o que observou, salvando na pasta pessoal como combinado.



7. (Adaptado de GOMES, 2013) **RELAÇÃO NÚMERO COMPLEXO E PAR ORDENADO:** Em 1831, Gauss retomou a ideia de Argand e pensou nos números  $a + bi$  como

coordenadas no ponto em um plano cartesiano, tendo assim  $(a, b)$ . Deu-se também uma interpretação geométrica para a adição e multiplicação dos símbolos. Compare os valores obtidos na Janela Algébrica de todas as atividades anteriores.

- a) Há alguma relação entre par ordenado e número complexo? Escreva seu comentário abaixo.

- b) É possível reconhecer a parte real e a parte imaginária utilizando pares ordenados?

- c) O que está acontecendo sobre os eixos  $x$  (eixo real) e  $y$  (eixo imaginário)?

- d) Quais são os vetores associados aos números complexos desta atividade?

**8. (Adaptado de GOMES, 2013) MARCANDO PONTOS NO SOFTWARE GEOGEBRA E REALIZANDO OPERAÇÕES:** Em 1575, um outro italiano chamado Rafael Bombelli publicou um livro chamado *Álgebra* em que descreve as ideias de Cardano e de Tartaglia de forma didática. É precisamente neste livro onde aparece pela primeira vez a necessidade

explícita de introduzir os números complexos e também uma primeira apresentação do assunto. Bombelli decidiu trabalhar como se raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números, imaginando que  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Em vez de falar  $2 + \sqrt{-121}$  como “dois mais a raiz quadrada de menos 121”, ele dizia “dois mais de menos a raiz quadrada de 121”, de modo que “mais de menos” se tornou o código para somar a raiz quadrada de um número negativo. Subtrair tal raiz quadrada ficou “menos de menos”. Outros matemáticos desenvolveram a ideia. O símbolo  $i$  foi usado pela primeira vez para representar  $\sqrt{-1}$  por Leonhard Euler em 1777. Se  $i = \sqrt{-1}$ , então  $i^2 = -1$ , chamada de unidade imaginária.

Faça o que se pede:

- a) Digite na “entrada” o número complexo  $Z = 2 + 3i$  e clique “enter”. Em seguida, digite  $W = 4 + i$  e “enter”.
- b) Clique na ferramenta “Exibir” e selecione “vetor”. Clique sobre a origem e sobre o ponto  $Z$  e faça o mesmo processo para  $W$ .
- c) Na entrada digite:  $S = Z + W$  e “enter”. Faça novamente o vetor da origem até  $S$ , depois faça segmentos  $SZ$  e  $SW$ . Observe os números na janela de álgebra e escreva abaixo o que você observa sobre o significado geométrico da adição de números complexos.

- d) Na entrada digite:  $D = Z - W$  e tecla “enter”; e em seguida digite:  $D = W - Z$  e tecla “enter”. Compare os resultados obtidos e registre sua conclusão.

**9.** (Adaptado, ELI, 2014) **A NECESSIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS:** Você sabia que a solução para a tarefa de número 2 fora publicada pela primeira vez num livro chamado *Ars Magna* (1545), por Cardano. Ele apresenta a resposta que envolve raízes quadradas de



números negativos, conhecidos hoje como os Números Complexos:  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$  e concluiu seu trabalho dizendo: “ são verdadeiramente sofisticadas” e que continuar trabalhando com elas seria “tão sutil quanto inútil”. Contudo, como vimos anteriormente, Bombelli com seus estudos nos mostrou que não. Com os dados do exercício 2, preencha a tabela abaixo e responda as questões abaixo:

PAR ORDENADO
(x, y)
3, 21
4,5; 24,75
12; -24

a) Com os pontos da tabela acima, faça o gráfico da função  $Z = x(10 - x)$  que fornece os valores do produto em relação a variável x.

b) Analisando o gráfico da alternativa anterior, responda, o gráfico desta função tem características de uma equação de qual grau? Justifique.

c) Esse problema possui solução no conjunto dos números reais? Justifique sua resposta.

**10. VERIFICAÇÃO:** Faça a verificação da solução de Cardano e confira conforme o enunciado do problema se a resposta de Cardano estava correta. Justifique ainda se a utilização de Números Complexos é viável para a solução do referido problema.

a)  $5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15}$

b)  $5 + \sqrt{-15} * 5 - \sqrt{-15}$

c) Agora pense e responda: O número 1, pode ser complexo? Será que qualquer número real é complexo?

**11. (Adaptado de GOMES, 2013) OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS:**

a) Dados o número complexo  $Z = 1 + 4i$ , marque-o no plano dos Complexos no GeoGebra;

b) Em seguida, multiplique-o pelos respectivos valores abaixo e teça discussões sobre o comportamento do complexo no plano.

$$Z * 2 \quad Z * 4 \quad Z * 5$$

$$Z * (-1) \quad Z * (-2) \quad Z * (-5)$$

c) Marcados os pontos e feita as operações, o que observa?

**12. (Adaptado de GOMES, 2013) OPERAÇÕES COM OS COMPLEXOS NO GEOGEBRA (MULTIPLICAÇÃO):** Resolva:

a) Digite na entrada  $Z = -5 + 3i$ , “enter” e faça o segmento da origem a  $Z$ . Digite  $Z * (1,2)$  que significa  $Z$  multiplicado pelo número 1, 2; e “enter”. Repita o procedimento para  $Z * (1)$ ;  $Z * (0,5)$ ,  $Z * (1.5)$ ;  $Z * (2)$ . Escreva o que você observa.

b) Digite na entrada um número complexo  $Z$  de sua preferência e faça o segmento até a origem. Faça uma multiplicação por  $i$ , digitando  $Z*i$  e “enter”. Faça o segmento da origem até este número. O que você observa em relação às coordenadas, ao tamanho do segmento e ao ângulo entre os segmentos?

c) Digite  $Z/i$  e “enter”. Logo depois, digite  $Z*(2i)$  e “enter”. O que acontece nesses casos? Explique no espaço abaixo.

**13. MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS:**

a) Digite na entrada  $Z = 2 + 3i$  e  $W = 2i$ . Digite na entrada a multiplicação entre eles e observe as coordenadas do resultado. Descreva o resultado.

b) Continue com o vetor  $Z$  acima e tome  $W = 5 + i$ . Descreva o que observa.

c) Você já sabe que multiplicar por  $i$ , é girar o vetor  $90^\circ$  no sentido anti-horário. Sendo assim, multiplique os vetores deste exercício por  $-i$  e relate as semelhanças e diferenças, se houver.

**14. OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS COMPLEXOS:** Dados dois números complexos  $Z(2,5)$  e  $W(3,4)$ , resolva:

a)  $D = Z - W$  (diferença)

b)  $S = Z + W$  (soma)

c)  $P = Z * W$  (produto)

d)  $Q = Z/W$  (quociente)

**15. (DESENVOLVIMENTO DA UNIDADE IMAGINÁRIA):** Leonardo Euler (1707-1783) de Basileia, Suíça, foi um dos matemáticos que mais produziu e publicou em todo os tempos. Num trabalho de 1777, definiu  $\sqrt{-1}$  como sendo  $i$ , de forma que  $i^2 = -1$  chamando de unidade imaginária. Considere o número complexo

$$3 + 3i$$

Representado por um ponto no Plano de Argand-Gauss. Se multiplicarmos este número por uma unidade imaginária ( $i$ ), o segmento de reta que une este ponto à origem do sistema sofrerá uma rotação de:

A)  $30^\circ$  no sentido anti-horário.

B)  $150^\circ$  no sentido horário.

C)  $120^\circ$  no sentido horário.

D)  $90^\circ$  no sentido horário.

**16. ROTAÇÃO.** Utilizando o *software* GeoGebra e tomando como base o exercício anterior, multiplique constantemente novamente o vetor  $3 + 3i$  e veja o que acontece. Escreva suas conclusões abaixo:

**17. APLICAÇÕES NA FÍSICA.** Ao considerar os Números Complexos como vetores, suas operações estabelecem relações entre os mesmos e as Física. Tomando-os como grandezas vetoriais, os mesmos podem ser úteis para determinar a força resultante que age sobre um corpo

no qual atuam várias forças. Como se pode observar abaixo, a força que produz sozinha o mesmo efeito que todas as outras juntas denomina-se resultante do sistema de forças.

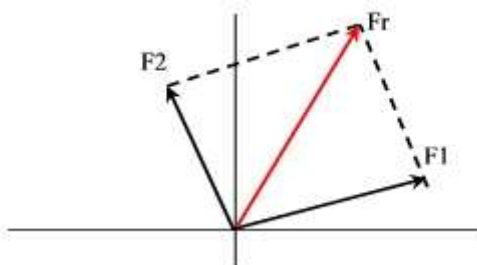


Figura 5: Força resultante de um sistema de forças

Onde:

$F_1$ : Força 1 que atua sobre um corpo;

$F_2$ : Força 2 que atua sobre o mesmo corpo;

$F_r$ : Força resultante

Dadas duas forças,  $F_1$  e  $F_2$  atuando sobre um mesmo corpo causando o mesmo efeito, denominado de Força Resultante ( $F_r$ ), que possui o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido que o vetor soma,  $F_1 + F_2$ , ou seja  $F_r = F_1 + F_2$ .

Dado então, duas forças que agem sobre um corpo. Sabendo-se que as forças estão representadas em complexos,  $F_1 = 10 + i$  e  $F_2 = 2 + i$ . Utilizando o *software* GeoGebra, determine a força resultante.

**18. MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO:** O módulo de um Número complexo é a distância de um número até a origem do plano. O Módulo de um número pode ser representado assim:  $|Z|$

Desta forma, usando o plano de Argand-Gauss, você poderá comparar os complexos dizendo qual número possui maior módulo. Coloque os números abaixo em ordem crescente de módulo:

$$Z = 3 + 4i \quad K = 2 \quad W = 2 + 5i \quad T = 6i \quad R = -3 - 2i$$

a) Meça o módulo de complexo e anote suas observações.

b) Dados os complexos, multiplique-os por “i” e anote suas conclusões quanto ao ângulo.

**19. MEDINDO ÂNGULO (ARGUMENTO) DE UM COMPLEXO:** O argumento de um Número Complexo é o ângulo formado entre o complexo e o eixo real. Agora que você aprendeu o que é o módulo de um complexo, poderá identificar também o seu argumento.

Tomando como base a tarefa de número 17, meça os ângulos de cada complexo, clicando na ferramenta Ângulo e em seguida apontando o vetor. Em seguida, clique no botão mover, e movimente livremente os pontos observando o que acontece com seus valores.

**20. CALCULANDO O CONJUGADO DE UM COMPLEXO:** Dado o número complexo  $Z$ , definido por  $Z = a + bi$ , o conjugado de  $Z$ , será indicado por  $\vec{Z} = a - bi$ . Neste sentido, efetue:

a). Verifique:

$$Z = 2 + 3i \rightarrow \vec{Z} = 2 - 3i$$

$$Z = 1 + 3i \rightarrow \vec{Z} = 1 - 3i$$

$$Z = -4i \rightarrow \vec{Z} = 4i$$

b). Seja  $Z = 2 + 3i$ , calcule a soma de  $Z$  com o seu conjugado. Faça o mesmo para o número complexo  $w = -1 - 3i$ . Anote suas conclusões no caderno.

**21. (Adaptado de GOMES, 2013) CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO:** Dados dois números complexos quaisquer, responda:

a) O que acontece quando realizamos a soma de número complexo com seu conjugado?

b). O que acontece quando fazemos  $Z - \bar{Z}$ ?

**22.REFLEXÃO EM ESPELHOS PLANOS.** Do estudo de Óptica da disciplina de Física, sabe-se que:

- O raio incidente, o raio refletido e a normal à superfície de incidência estão no mesmo plano;
- O ângulo de reflexão e o de incidência tem a mesma medida.

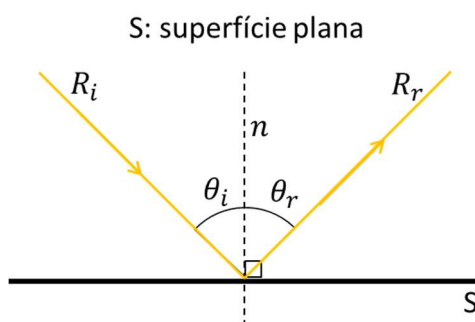


Figura 6: Superfície Plana de um Espelho.

Em complexos, tem-se que, o raio refletido aparece como o simétrico do raio incidente em relação à normal  $N$  e ao próprio espelho. A direção dos raios incidentes e refletido é dada pelos complexos (vetores)  $z$  e  $\bar{z}$  no plano determinado. Fazendo assim, encontramos pois o conjugado de um número. Dado um raio incidente de características complexas  $Z_1 = 2 + 3i$ , encontre o raio refletido e verifique a medida dos ângulos.

**23.**(ELI, 2014, p. 140). **CÁLCULO DE ÁREAS** Os números complexos  $Z_1 = 2 + 2i$ ,  $Z_2 = 5 + 2i$  e  $Z_3 = 2 + 6i$ , em que  $i$  é a unidade imaginária, representados geometricamente no plano

de Argand-Gauss, definem, respectivamente, o triângulo retângulo ABC. Desenhe o triângulo no referido plano e calcule a sua área.

24.(Adaptado, ELI, 2014, p. 144). A figura apresenta no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Os vértices desse hexágono são afixos dos números complexos  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$  e  $Z_6$  como se vê abaixo. Determine o argumento principal desses afixos e indique o valor dos argumentos no próprio hexágono.

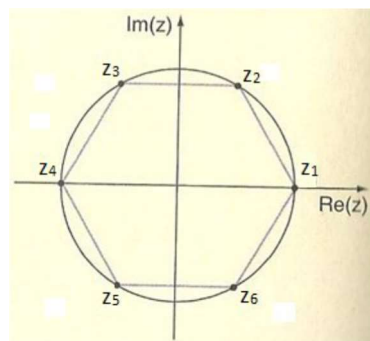


Figura 7: Hexágono Regular Inscrito na Circunferência

25.(Adaptado, ELI, 2014, p. 145). Sabe-se que a medida do lado do quadrado ABCD é 10. Expresse as medidas dos ângulos dos afixos A, B, C e D (argumentos) e as distâncias entre os afixos até a origem (módulos). Indique o valor dos argumentos na própria figura do quadrado.

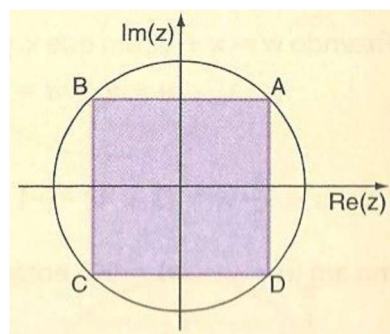


Figura 8: Quadrado com centro na origem do plano complexo.

26.(Adaptado, DANTE, 2005, p. 272). **Engenharia Elétrica.** Em circuitos de corrente alternada, como por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos Números Complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação  $U = Ri$ , estudada na Física do Ensino Médio e que se utiliza de números reais, torna-se  $U = Zi$ ,



em que  $U$  é a tensão,  $Z$  é a impedância e  $i$  é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representados através de Números Complexos. Para que não haja confusão entre  $i$ , símbolo da corrente elétrica e  $i$ , unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam  $j$  como unidade imaginária na representação algébrica  $a + bj$ . Neste sentido, dada uma fonte de tensão de valor 220, alimenta uma carga de impedância  $Z = (10 + 10j)$  ohm. Obtenha a corrente fornecida pela fonte.

**27.**(Adaptado. PAIVA, 2009, p. 146). **Centro de Massa.** É comum, em física, estudar o centro de massa de um corpo, aproximadamente plano, considerando-o no plano de Argand-Gauss. Dessa forma, define-se o centro de massa de um conjunto de pontos materiais de massas  $M_1$ ,  $M_2$ , e  $M_3$ . Localizadas, respectivamente nas imagens dos números complexos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  como a imagem do número complexo  $x$  dado por:

$$Z = \frac{M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3}{M_1 + M_2 + M_3}$$

De acordo com essa ideia, considerando três pontos materiais de massas 2 Kg, 3 Kg e Kg localizados no plano de Argand Gauss nos afixos dos complexos  $Z_1 = 6 + 3i$ ,  $Z_2 = -2 + 4i$  e  $Z_3 = 6i$ , determine o centro de massa desse conjunto de pontos e faça sua representação geométrica.

**Nota:** O centro de massa de um corpo é o ponto onde se considera concentrada toda a massa do corpo, para simplificação de cálculos.

**28.**(Adaptado. PAIVA, 2009, p. 146). **Centro de Massa.** A definição de centro de massa  $z$ , apresentada no exercício anterior, é estendida para qualquer número  $n$  de pontos materiais, com  $n \in \mathbb{N}^*$ , de massas  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_N$  localizados, respectivamente, em  $n$  pontos do plano complexo, imagens  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_N$ , isto é:

$$Z = \frac{M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3 + \dots + M_N Z_N}{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_N}$$

De acordo com esta ideia, considere cinco pontos materiais de mesma massa  $m$ , localizados nas posições indicadas no plano complexo abaixo. Determine o número complexo que representa o centro de massa do sistema constituído por esses cinco pontos materiais  $U = 1 + 5i$ ;  $B = 6 + 2i$ .  $C = -4 + 3i$ ,  $D = -2 - 5i$ ,  $E = 3 - 3i$  e em seguida localize-os no mesmo plano complexo.

**OBSERVAÇÃO:** Ao final de cada atividade, os alunos devem salvar os arquivos como por exemplo: Atividade 1\_Nome do aluno e assim sucessivamente.

## REFERÊNCIAS

ELI, Juliano. **NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES:** Uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica. Dissertação. Universidade Regional de Blumenau – FURB Centro de Ciências Exatas e Naturais (CCEN). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM) – Blumenau, 2014, 171p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004, p. 240-256.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011, 848p.

GOMES, Reinaldo. **Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra**. Dissertação do mestrado da Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2013, 84p.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, p. 140-16

## APÊNDICE F - Plano de ensino

Unidade Educacional: Colégio Areia Dourada

Professor: Douglas Pereira Azevêdo

Série: 3<sup>a</sup>

Turma: A

Mês: Novembro

Período: 02/ 11/2015 à 20/11/2015

Nº de Aulas		Conteúdo	Objetivos	Avaliação/Instrumentos
01	01 aula de 40 minutos	Video: "Vida-Maria".	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aspectos Motivacionais internos e externos;</li> </ul>	Observação do nível de compreensão sobre o assunto a partir da participação no diálogo proposto.
02	01 aula de 50 minutos	<i>Software GeoGebra</i> ;	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conhecer o <i>Software GeoGebra</i>;</li> </ul>	Participação dos alunos durante a realização das atividades, em suas falas e emoções.
03	01 aula de 50 minutos	Conjuntos Numéricos; História da Matemática.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar o conjunto dos Números Complexos e representá-los no eixo de existência;</li> <li>Pensar na ampliação dos Complexos;</li> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
04	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand</u> -Gauss.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos;</li> <li>Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica;</li> <li>Movimentar dos pontos no plano;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
			<ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar e Reconhecer dos quadrantes.</li> </ul>	
05	01 aula de 40 minutos	Plano de <u>Argand</u> -Gauss; Operações de adição e de subtração.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Atribuir características de um vetor para os complexos;</li> <li>Fazer operações de adição e de subtração com os Complexos (ente geométrico);</li> <li>Identificar e reconhecer dos quadrantes.</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
06	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand</u> -Gauss; Operações de adição e de subtração; Unidade Imaginária ( <i>i</i> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Fazer operações de adição e de subtração com os Complexos (ente geométrico);</li> <li>Identificar e conceituar a unidade imaginária;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
07	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand</u> -Gauss; Operações de adição e de subtração; Unidade Imaginária ( <i>i</i> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Aplicar as propriedades da radiciação de soma e de multiplicação;</li> <li>Identificar e conceituar a unidade imaginária;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.

08	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Operações de adição, subtração e de multiplicação; Unidade Imaginária ( <i>i</i> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Fazer operações de adição e de subtração com os Complexos (ente geométrico);</li> <li>Identificar e conceituar a unidade imaginária;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
09	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Operações de adição, subtração e de multiplicação; Unidade Imaginária ( <i>i</i> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Fazer operações de adição, de subtração e de multiplicação com os Complexos (ente geométrico);</li> <li>Identificar e conceituar a unidade imaginária;</li> <li>Calcular potências de expoente inteiro na unidade imaginária;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
10	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; Unidade Imaginária ( <i>i</i> ).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Fazer operações de adição, de subtração, multiplicação e divisão com os Complexos (ente geométrico);</li> <li>Identificar e conceituar a unidade imaginária;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
			<ul style="list-style-type: none"> <li>Calcular potências de expoente inteiro na unidade imaginária;</li> </ul>	
11	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Módulo de um Complexo; Força (Física);	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Resolver problema envolvendo conceitos de Números Complexos;</li> <li>Identificar e calcular o módulo de um Número Complexo.</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
12	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Conjugado de um Complexo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Identificar e calcular o Conjugado de um Número Complexo.</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
13	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Óptica (Reflexão em Espelhos Planos); Cálculo de Áreas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Resolver problema envolvendo conceitos de Números Complexos;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
14	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Aplicações na Geometria; Razões trigonométricas (razão seno).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Resolver problema envolvendo conceitos de Números Complexos;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.
15	01 aula de 50 minutos	Plano de <u>Argand-Gauss</u> ; Centro de massa (Física).	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender aspectos de visualização dos complexos (par ordenado);</li> <li>Resolver problema envolvendo conceitos de Números Complexos;</li> </ul>	Análise da participação dos alunos durante as atividades, em suas falas e em seus registros, por meio da lista de tarefas, do diário de bordo, das fotos e filmagens.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. CURRÍCULO REFERÊNCIA DA REDE ESTADUAL DE EDUCAÇÃO DE GOIÁS.– SEDUC/GO – MEC. 2013.p. 164-166.

ELI, Juliano. **NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES**: Uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica. Dissertação. Universidade Regional de Blumenau – FURB Centro de Ciências Exatas e Naturais (CCEN). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM) – Blumenau, 2014, 171p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004, p. 240-256.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011, 848p.

GOMES, Reinaldo. **Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra**. Dissertação do mestrado da Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2013, 84p.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, p. 140-164.



## APÊNDICE G – Versão do Produto Final

Conforme exigência para a conclusão e aprovação do Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, devemos pois elaborar além da dissertação um produto-final que servirá de subsídios e inspiração para outros professores de Matemática, enfim que este possa ser disseminado, analisado por outros professores e demais profissionais da educação.

O produto final será gerado afins de divulgação para a aplicação em espaços formais de ensino, que se destinarão a melhoria da prática profissional no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

O produto final desenvolvido foi uma *Website*, contendo todas as etapas da pesquisa, sendo esta fruto desta dissertação de mestrado intitulada de Ensino Desenvolvimental: Um Experimento Didático Formativo para o estudo dos Números Complexos.

O acesso pode ser feito pelo endereço eletrônico <http://douglaspr8.wixsite.com/experimentodidatico> ou pelo acesso às dissertações e produtos no site do Programa do Mestrado para o Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás pelo endereço [www.jatai.ifg.edu.br/ppgecm/](http://www.jatai.ifg.edu.br/ppgecm/).

Este site consta esta pesquisa, afim de auxiliar que outros professores percebam as potencialidades da organização do ensino pautado nos pilares da Teoria Histórico-Cultural e do Ensino Desenvolvimental com o uso de tarefas investigativas no *software* GeoGebra.

A seguir a descrição das páginas, abas e links do sítio.

A página inicial denominada de IDENTIFICAÇÃO explica a proposta do site. Além disso, descreve alguns elementos da pesquisa os quais levam o leitor a ter interesse em navegar pelas outras páginas que contêm o desenvolvimento geral da pesquisa.

# ENSINO DESENVOLVIMENTAL: *Um Experimento Pedagógico Formativo para o Estudo dos Números Complexos.*

IDENTIFICAÇÃO
PESQUISA
APORTES TEÓRICOS
TAREFAS DE ESTUDO
PLANO DE ENSINO
LINKS IMPORTANTES
CONTATO


Seja bem vindo ao nosso site!


Este Website foi criado como produto final do projeto de pesquisa do acadêmico Douglas Pereira Azevêdo, do Mestrado em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Jataí, como parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática.


O objetivo deste é tornar público todas as sequências didáticas desenvolvidas durante a realização do Experimento Pedagógico Formativo por meio do uso das tarefas de aprendizagem pautadas no bojo do Ensino Desenvolvimental utilizando o software GeoGebra dando origem a dissertação intitulada com o mesmo nome do nosso site.

A presente pesquisa interessa a educadores como um todo, em especial aos que sejam da área de Educação Matemática. A fundamentação teórica que norteou o presente estudo pautou-se na Teoria Histórico-Cultural de Vigotsky e na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, além de outros autores como Chulkin, Lompschov, Hedebrand entre outros que realizaram suas pesquisas, em diferentes etapas de ensino, com o objetivo de pensar em um ensino que ajude os alunos a desenvolver o pensamento teórico.

As atividades poderão servir de consulta para educadores que queiram inovar sua prática, bem como para a formação inicial de futuros professores para que possam fazer reflexões e discussões quanto ao trabalho realizado contribuindo assim para o desenvolvimento da Educação Matemática.







A página PESQUISA apresenta o resumo da pesquisa, abordando a justificativa, a questão de pesquisa, as hipóteses, os objetivos geral e específicos, um breve recorte do referencial teórico que embasou a estrutura das atividades de estudo, as dificuldades enfrentadas e algumas conclusões bem como um link denominado Dissertação onde o pesquisador poderá baixar o trabalho completo



# ENSINO DESENVOLVIMENTAL:

*Um Experimento Didático Formativo para o Estudo dos Números Complexos.*

IDENTIFICAÇÃO
PESQUISA
APORTES TEÓRICOS
TAREFAS DE ESTUDO
PLANO DE ENSINO
LÍNEAS IMPORTANTES
CONTATO

## RESUMO

A presente pesquisa tem como tema central o ensino-aprendizagem dos Números Complexos. Apoiada em referências teóricas da Educação Matemática notamos que a dificuldade da aprendizagem Matemática, está muitas vezes ligada aos métodos de ensino. A fundamentação teórica que norteou o presente estudo pautamos na Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e na Teoria do Ensino Desenvolvidor de Davydov, além de outros autores como Chalkin, Lompochev, Hecogozar entre outros que realizaram suas pesquisas, em diferentes etapas de ensino, com o objetivo de pensar em um ensino que ajude os alunos a desenvolver o pensamento teórico. Buscamos, pois, responder a seguinte pergunta: "Como organizar o ensino-aprendizagem dos Números Complexos por meio do Experimento Didático Formativo de Davydov?". Para responder às questões, objetivamos analisar e discutir práticas e estratégias de ensino afim de propiciar aos alunos a construção do conceito de Números Complexos. Para tanto, precisamos compreender e apoiar as Teorias de Ensino de Vygotsky e de Davydov afim de reconhecer o aspecto nuclear do conceito de Números Complexos como base para o seu ensino. Utilizamos como ferramenta ou recurso de aprendizagem o software GeoGebra no intuito de propor tarefas mais dinâmicas. Neste sentido, ao longo deste trabalho discutimos também sobre as possibilidades e desafios quanto ao uso das Tecnologias de Aprendizagem para o ensino de Matemática. Quanto aos procedimentos metodológicos a pesquisa foi de natureza qualitativa por meio da realização do Experimento Didático Formativo numa turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Estado. Os instrumentos de pesquisa foram observação, entrevista, filmagem, questionário, diário de bordo, fotos e tarefas realizadas pelos alunos. Os resultados apontaram que a organização do ensino baseada nos pilares do Experimento Didático Formativo se consolida como uma alternativa para a superação dos tipos de ensino de Matemática que não privilegiam o desenvolvimento do aluno, sendo uma possibilidade efetiva para o ensino-aprendizagem dos Números Complexos.

**Palavras-Chave:** Teoria Histórico-Cultural, Ensino Desenvolvidor, Ensino-aprendizagem de Matemática.








Na página APORTES TEÓRICOS, está o embasamento em que a pesquisa foi estruturada para a elaboração das tarefas de estudos. Está dividida em três subitens, iniciando com a Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky com um pequeno resumo. Em seguida consta a um resumo sobre o Ensino Desenvolvidor de Davydov. O último tópico desta página está se referindo ao *software* GeoGebra.

## ENSINO DESENVOLVIMENTAL: *Um Experimento Didático Formativo para o Estudo dos Números Complexos.*

IDENTIFICAÇÃO
RECURSOS
APORTES TEÓRICOS
TAREFAS DE ESTUDO
PLANO DE ENSINO
LINKS IMPORTANTES
CONTATO

### Aportes Teóricos

Teoria Histórico-Cultural de Vigotsky



Para entender a crise em que se encontra a Psicologia no início do século XX, Vigotsky desenvolveu estudos e concluiu que o sujeito desenvolve por meio de processos de interação social as funções psicológicas. Para Vigotsky, a crise em que a Psicologia se encontra só poderá ser superada por meio de um estudo da história do desenvolvimento humano.

Vigotsky nasceu numa época de grandes transformações, a psicologia como ciência natural tendo como características a materialização, objetivização, dentre outros pontos mais, e a psicologia como ciência mental, caracterizada pelo idealismo e descrever subjetivas.

Um grupo de pesquisas composto por Alexander Romanovich Lurii (1902-1977) e Alekséi Nikolaevich Leontiev (1904-1979), ligados com esta questão, inspirados por Vigotsky iniciaram seus estudos ainda no auge da Revolução Russa, com o objetivo de promover uma mudança na compreensão do ser humano, dando origem assim a uma nova teoria, a Teoria Histórico-Cultural (THC), que se caracteriza em aspectos de interação sintetizando de maneira geral as duas correntes mencionadas.

Constataram que é por meio das relações com o outro, isto é, através das relações sociais é que o ser humano é capaz de se desenvolver historicamente, devido à apropriação que faz da cultura humana e consequentemente, no que está se desenvolvendo. Desta forma, para Vigotsky a compreensão do mundo depende da relação direta com o outro, pois é por meio desta interação, é que se formam novos conhecimentos e Est...

Ensino Desenvolvidor de Davydov



Vigotsky além de ser o patrono da Teoria Histórico-Cultural, contribuiu bastante para várias outras pesquisas que, em geral, continuaram com o desenvolvimento da psicologia social e educacional, após sua morte.

Vasily Vasilievich Davydov (1930-1998) era Membro da Academia de Ciências Pedagógicas, doutor em psicologia, professor universitário, pertencendo à terceira geração de pedagogos russos e soviéticos, desde os trabalhos do grupo inicial de Vigotsky realizados nas décadas de 1920 e 30 do século passado. Embora Davydov tenha falecido em 1998, seu sistema continua em desenvolvimento pelo grupo de colaboradores e continuadores, não sendo uma obra pronta e acabada.

As pesquisas intenciais com Elkonin, principalmente as realizadas na Escola Experimental N.º 91 de Moscou, foram dando bases e subsídios consistentes para o surgimento da Teoria do Ensino Desenvolvidor.

Neste sentido, em 1960, ambos propõem a reorganização de programas de ensino, criando assim o sistema Elkonin-Davydov. Por volta de 1970, Elkonin e Davydov foram formalizando a Teoria do Ensino Desenvolvidor, conhecida e denominada na época por muitos de nova etapa da teoria da atividade. A essência do ensino desenvolvidor é a teoria da atividade de estudo e seu objeto, visando ser imposto desde as séries iniciais para que a criança adquira uma atitude de estudo.

Quanto muito tempo, na Rússia e até os dias atuais, muito se popularizou a denominação do sistema didático instituído de Elkonin-Davydov que hoje chamamos o nome de Ensino Desenvolvidor, resultado do longo trabalho de ambos, por volta de 1970. Esta destaca-se como um desdobramento da Teoria Histórico-Cultural.

Software GeoGebra



No trabalho fazemos algumas reflexões discussões sobre as novas tecnologias na educação, em especial quanto ao uso dos softwares, seus impactos na sociedade, na escola, na formação de professores e nas atitudes de professores e alunos que serão usuários destas novas ferramentas. Estudamos como Van (2011); Bento (2010); Gervasio e Sant'Anna (1998); Bortolotto (2007); Lúvy (2009), dentre outros colaboramos nas reflexões que seguirmos sobre as tecnologias na Educação Matemática.

Segundo Lúvy (1999), a forma como o ensino se dá, pautado em modelos tradicionais, acaba-se tornando de certa forma obsoleto, pois a constante necessidade de renovação de saberes, as novas exigências do mercado de trabalho, e o obsolescência, que mantém conhecimentos que se tornam e levam à criação de mudanças cognitivas.

O uso de tecnologias, em especial neste trabalho, o uso de softwares não é garantia de aprendizagem, o instrumento tecnológico é uma máquina como qualquer outra e irá realizar aquilo que o ser humano programar para que faça.

As possibilidades que os softwares representam se bem planejadas e com tarefas que levem aos alunos à construção do saber, em tempos de recursos didáticos, permitem práticas docentes mais coerentes com o atual perfil dos alunos.

A educação precisa estar preparada para as inovações, pois as transformações oriundas com a tecnologia constam e precisam de novas metodologias de ensino, e com tarefas que levem aos alunos a construção do saber, em novas formas de acesso à informação, novas formas de aprendizagem. Esse modelo de conhecimento, ajuda no combate a tarefas que veem o conhecimento como algo pronto e acabado.

Na página TAREFAS DE ESTUDO estão o detalhamento de cada tarefa que foi trabalhada em sala de aula e suas análises.







## ENSINO DESENVOLVIMENTAL: *Um Experimento Didático Formativo para o Estudo dos Números Complexos.*

IDENTIFICAÇÃO
RECURSOS
APORTES TEÓRICOS
TAREFAS DE ESTUDO
PLANO DE ENSINO
LINKS IMPORTANTES
CONTATO

Este tópico se refere as atividades de estudo trabalhadas ao longo do Projeto envolvendo alguns conceitos de Números Complexos.

A lista desta seção é uma sugestão para o Professor ou para o pesquisador para o seu trabalho, bem como para legitimar ou contribuir para esta pesquisa.

Segue abaixo todas a tarefas divididas em conceitos quanto ao estudo dos Números Complexos.

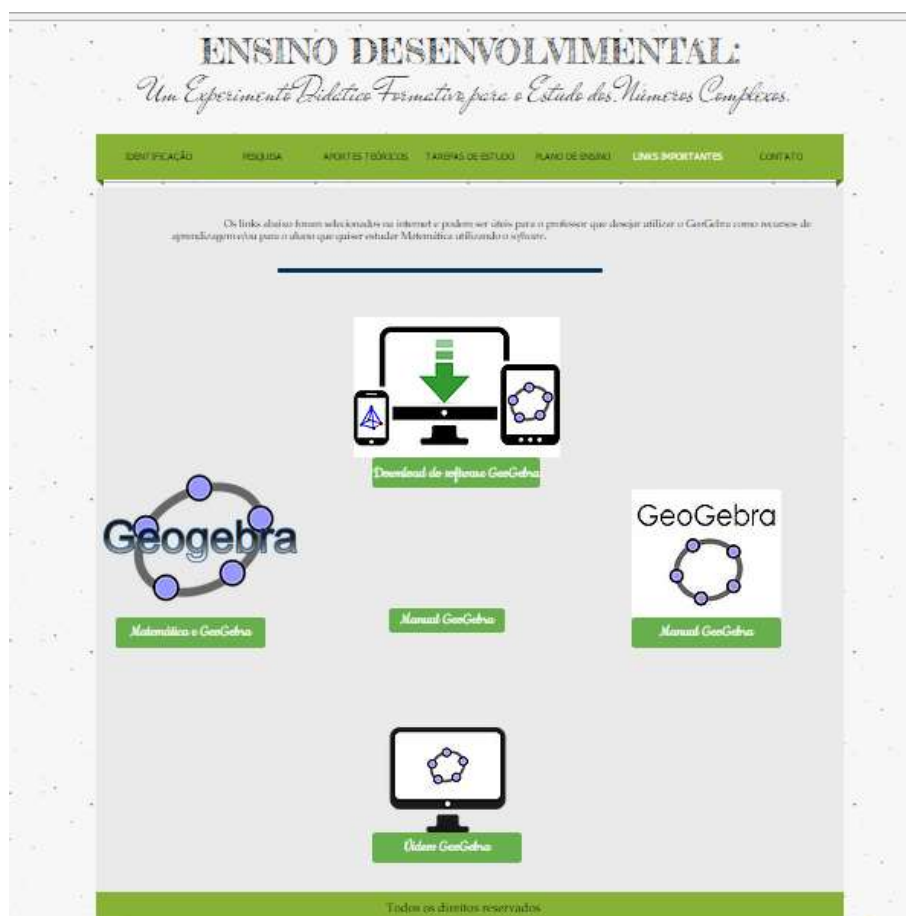
 Relembrando os conjuntos numéricos.	 Contribuições de Bombelli e de Cardano
 Reconhecimentos dos Números Complexos	 Software GeoGebra
 Operações com Números Complexos	 Módulo de um Número Complexo
 Argumento de um Número Complexo	 Conjugado de um Número Complexo
 Aplicações dos Números Complexos	

Todos os direitos reservados.

Na página PLANO DE ENSINO, podemos encontrar a sequencia utilizada ao longo do desenvolvimento do Experimento Didático Formativo.



A página LINKS IMPORTANTES, sugere alguns sites relacionados à disciplina de Matemática. Traz, também, alguns links ligados ao software GeoGebra.



A última página, CONTATO traz um currículo resumido dos pesquisadores, com *link* direto ao currículo Lattes, constando ainda endereço de e-mail e telefone. Além disso consta o endereço do Programa de Pós-Graduação do Mestrado da qual fazemos parte.

**ENSINO DESENVOLVIMENTAL:**  
*Um Experimento Didático Formador para o Estudo dos Números Complexos.*

IDENTIFICAÇÃO   PESQUISA   APUNTES TEÓRICOS   TEMAS DE ESTUDO   PLANO DE ENSINO   LINKS IMPORTANTES   CONTATO

**Quem somos?**

**Acadêmico: Prof. Douglas Pereira Azevêdo**

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás (2013). Especialista em Psicopedagogia Interdisciplinar e Clínica (2011) pela Faculdade de Iporã.  
Tem experiência na área de Educação Matemática. É professor de uma escola pública do interior de Goiás.

e-mail: douglazep@hotmail.com  
tel: (64)98113-1646



[Lattes](#)



[Lattes](#)

**Orientador: Prof. Dr. Dueici Aparecido de Freitas Vaz**

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás (1989), Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (1996), Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista de Rio Claro-SP (2007). É professor adjunto da Pontifícia Universidade Católica de Goiás desde o ano de 1996. Tem ampla experiência no ensino da Matemática.  
Lectou Matemática em todas as séries do ensino fundamental e médio. No ensino superior atua nos cursos de formação de professor de Matemática e Física da Pontifícia Universidade Católica de Goiás e do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. Desenvolve pesquisas em Educação Matemática nos seguintes campos: Ensino e Aprendizagem da Matemática, História e Filosofia da Matemática.  
No Pós Graduação, é orientador do programa de Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Campus Jataí e do programa de Pós Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, na linha de Educação Matemática articulada com a linha do ensino Desenvolvimental de Davydov. Foi coordenador do curso de Licenciatura em Matemática no período de 2001 a 2003 e 2011 até os dias atuais. Coordena o Núcleo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (NEM/IFEG).

e-mail: dueici.vaz@icml.com  
tel:(62) 98471-1866

  
**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
GOIÁS**  
Campus Jataí

Neste espaço por sua vez, se almeja a troca de experiências, portanto o intuito é que não seja algo construído simplesmente por exigência deste programa, mas que seja uma possibilidade para o crescimento e para o desenvolvimento da Educação Matemática. Esperamos que de fato da sugestão aqui apresentada possam surgir novos questionamentos, indagações e novas percepções.

A ideia inicial que se tem é de interligar três vertentes do conhecimento, neste caso, Matemática, Tecnologia e Ensino Desenvolvimental.

